
الأدهم
فى
الرياضيـــــات
الصف الثالث الإعدادى
الترم الاول
٢٠١٨
اسم الطالب /
المدرســـة /
الفصـــل /
إعداد
أ/ محمد أدهم
ت / ٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧

أولاً : الجبر و الإحصاء

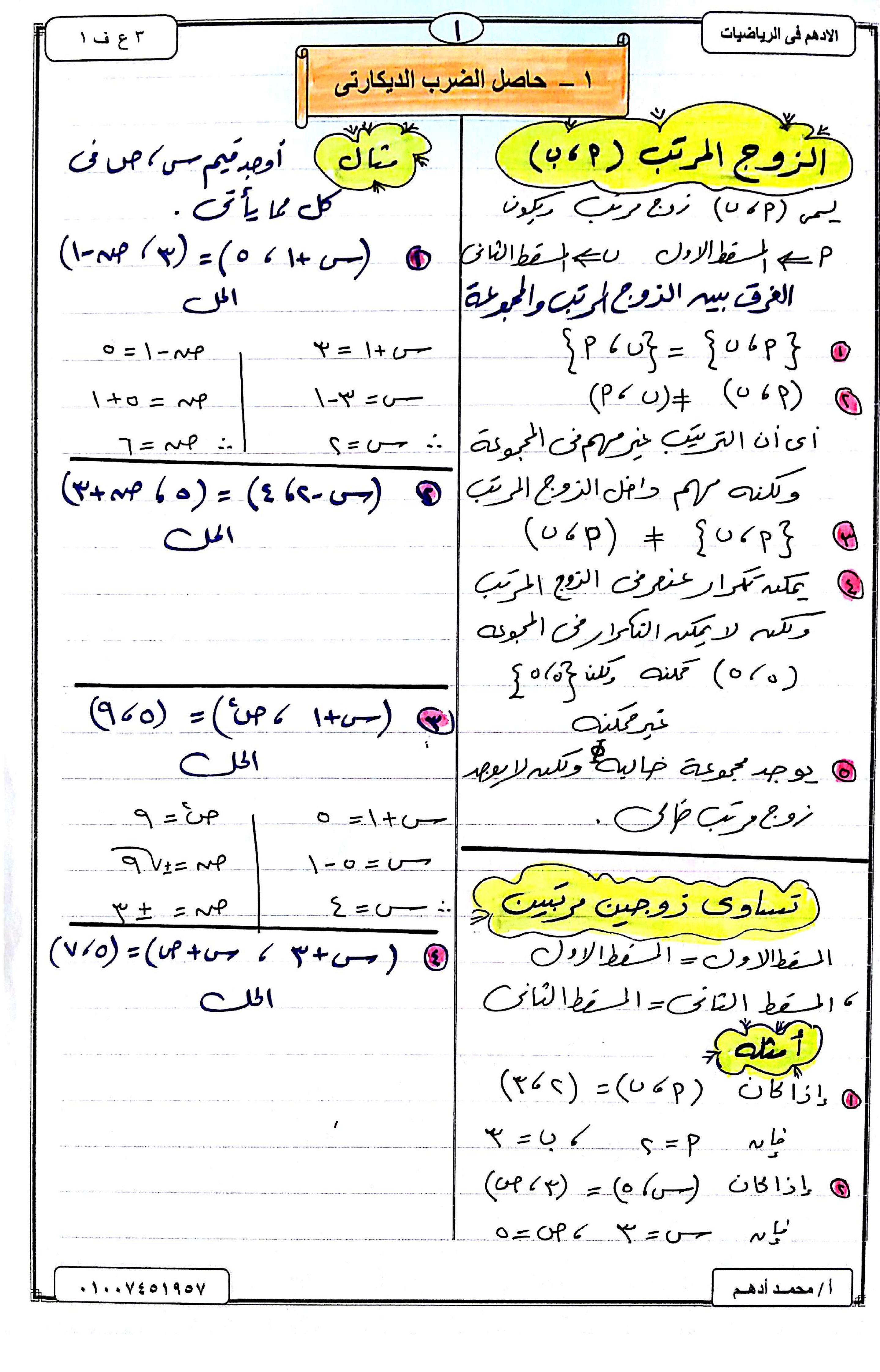
الوحدة الاولى (العلاقات والدوال)

رقم الصفحة

الوحدة الثانية (النسبة والتناسب _ التغير)

الوحدة الثالثة (الإحصاء)





١ ـ حاصل الضرب الديكارتى

الزوج المرتب (أ ، ب)

يسمى (أ ، ب) زوج مرتب مكون من

أ ⟸ المسقط الاول ، ب ⟸ المسقط الثانى

الفرق بين الزوج المرتب والمجموعة

١) {أ ، ب} = {ب ، أ}

٢) (أ ، ب) ≠ (ب ، أ)

أى أن الترتيب غير مهم فى المجموعة ولكنه مهم داخل الزوج المرتب

٣) {أ ، ب} ≠ (أ ، ب)

٤) يمكن تكرار عنصر فى الزوج المرتب ولكن لا يمكن التكرار فى المجموعة

(٥ ، ٥) ممكنة ولكن {٥ ، ٥} غير ممكنة

٥) يوجد مجموعة خالية ∅ ولكن لا يوجد زوج مرتب خالى.

تساوى زوجين مرتبين

المسقط الاول = المسقط الاول ، المسقط الثانى = المسقط الثانى

أمثلة

١) إذا كان (أ ، ب) = (٢ ، ٣) فإن أ = ٢ ، ب = ٣

٢) إذا كان (س ، ٥) = (٣ ، ص) فإن س = ٣ ، ص = ٥

مثال

أوجد قيم س ، ص فى كل مما يأتى.

١) (س + ١ ، ٥) = (٣ ، ص − ١)

الحل

س + ١ = ٣	ص − ١ = ٥
س = ٣ − ١	ص = ٥ + ١
∴ س = ٢	∴ ص = ٦

٢) (س − ٢ ، ٤) = (٥ ، ص + ٣)

الحل

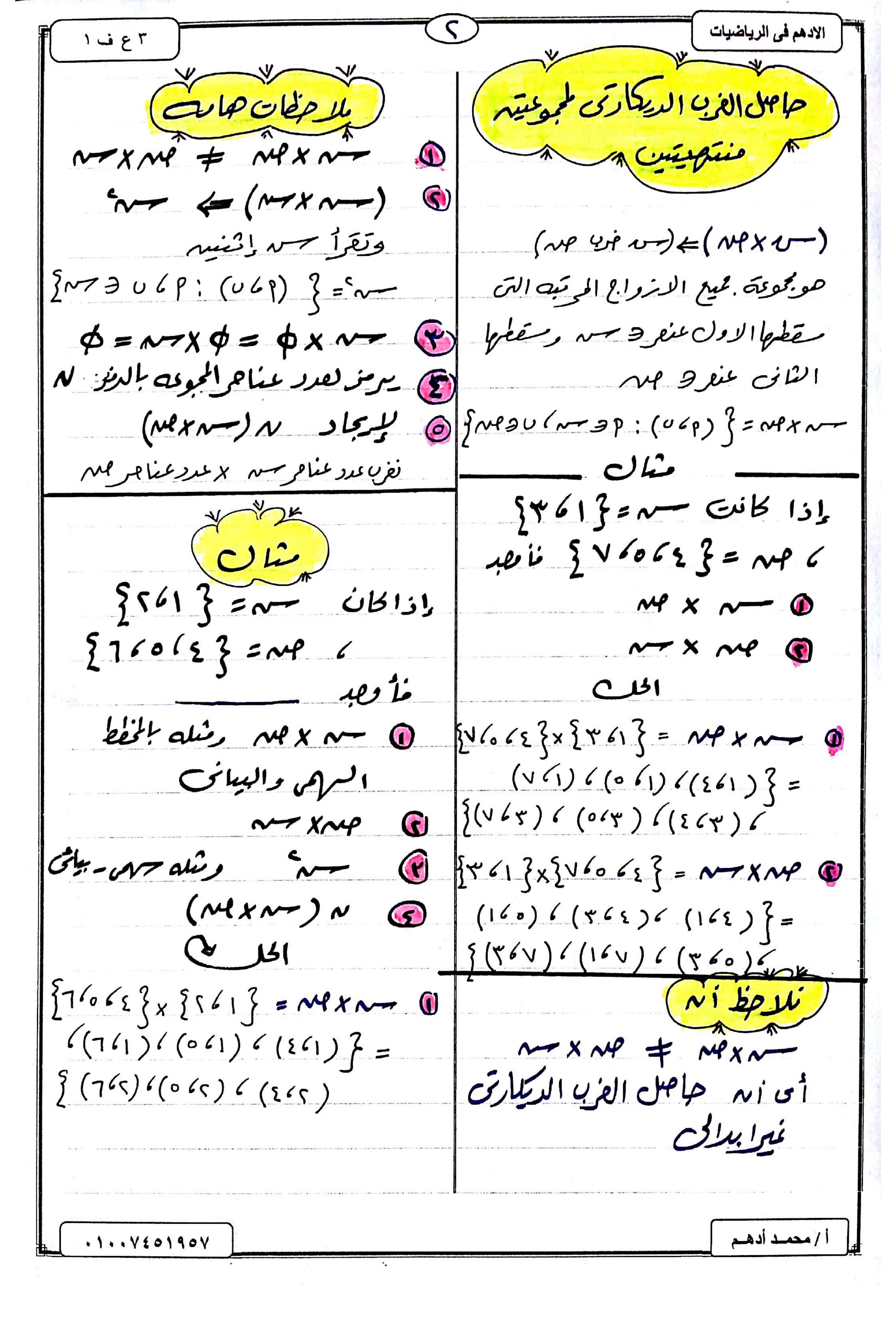
٣) (س + ١ ، ص٢) = (٥ ، ٩)

الحل

س + ١ = ٥	ص٢ = ٩
س = ٥ − ١	ص = ±√٩
∴ س = ٤	ص = ±٣

٤) (س + ٣ ، س + ص) = (٥ ، ٧)

الحل



حاصل الضرب الديكارتى لمجموعتين منتهيتين

(س × ص) ← (س ضرب ص)

هو مجموعة جميع الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول عنصر ∈ س ومسقطها الثاني عنصر ∈ ص

س × ص = {(أ، ب) : أ ∈ س، ب ∈ ص}

مثال

إذا كانت س = {١، ٣} ، ص = {٤، ٥، ٧} فأوجد

١) س × ص

٢) ص × س

الحل

١) س × ص = {١، ٣} × {٤، ٥، ٧}

= {(١، ٤)، (١، ٥)، (١، ٧)، (٣، ٤)، (٣، ٥)، (٣، ٧)}

٢) ص × س = {٤، ٥، ٧} × {١، ٣}

= {(٤، ١)، (٤، ٣)، (٥، ١)، (٥، ٣)، (٧، ١)، (٧، ٣)}

نلاحظ أنه

س × ص ≠ ص × س

أي أنه حاصل الضرب الديكارتى غير إبدالى

ملاحظات هامة

١) س × ص ≠ ص × س

٢) (س × س) ← س٢

وتقرأ س اثنين

س٢ = {(أ، ب) : أ، ب ∈ س}

٣) س × ∅ = ∅ × س = ∅

٤) يرمز لعدد عناصر المجموعة بالرمز ن

٥) لإيجاد ن(س × ص)

نضرب عدد عناصر س × عدد عناصر ص

مثال

إذا كان س = {١، ٢} ، ص = {٤، ٥، ٦}

فأوجد

١) س × ص ومثله بالمخطط السهمي والبياني

٢) ص × س

٢) س٢ ومثله سهمي - بياني

٤) ن(س × ص)

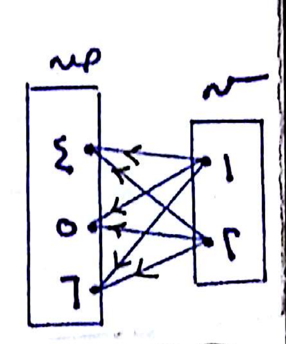
الحل

١) س × ص = {١، ٢} × {٤، ٥، ٦}

= {(١، ٤)، (١، ٥)، (١، ٦)، (٢، ٤)، (٢، ٥)، (٢، ٦)}

المخطط السهمى

١ المخطط البيانى (الديكارتى)

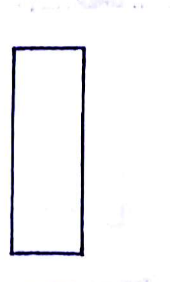


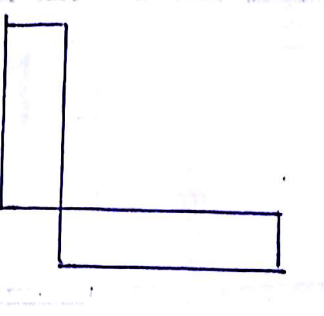
تدريب: اوجد ص × س وشكله بالمخطط السهمى والبيانى

ص × س =

المخطط السهمى

المخطط البيانى





③ س² = س × س

= {١ ، ٢} × {١ ، ٢}

= {(١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢)}

المخطط السهمى

المخطط السهمى

④ ن(س × ص) = ٢ × ٣ = ٦

ن(ص × س) = ٣ × ٢ = ٦

ن(س²) = ٢ × ٢ = ٤

ن(ص²) = ٣ × ٣ = ٩

تمرين يحل فى الحصة

إذا كان س = {أ ، ب} ، ص = {١ ، ٣ ، ٥} فأوجد

١- س × ص
٢- ص × س } مثلهم بالمخطط السهمى وآخر بيانى (ديكارتى)
٣- س²
٤- ص²
٥- ن(س × ص) ، ن(ص × س)
٦- ن(س²) ، ن(ص²)

الحل

فاكر التقاطع والاتحاد بتاع الابتدائى

١) س ∪ ص : س اتحاد ص كل اللى فى س و ص من غير تكرار

٢) س ∩ ص : س تقاطع ص
ناخذ المشترك فى س ، ص

٣) س − ص : س فرق ص
ناخذ الموجود فى س ومش موجود فى ص

٤) ص − س : ص فرق س
ناخذ الموجود فى ص ومش موجود فى س

كدة افتكرتهم ؟ أى خدمة

مثال

إذا كانت س = {أ ، ب} ، ص = {٣ ، ٥ ، ٧} ، ع = {٥ ، ٧ ، ٩}
مثل المجموعات بشكل فن ثم اوجد

١) س × ص
٢) ص × ع
٣) س × ع
(حلهم انت)

٤) س × (ص ∪ ع)
٥) س × (ص ∩ ع)
٦) س × (ع − ص)

الحل

س : أ× ، ب×
ص : ٣× ، ٥× ، ٧×
ع : ٥× ، ٧× ، ٩×

٤) س × (ص ∪ ع)
= {أ ، ب} × {٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩}
= {(أ ، ٣) ، (أ ، ٥) ، (أ ، ٧) ، (أ ، ٩) ، (ب ، ٣) ، (ب ، ٥) ، (ب ، ٧) ، (ب ، ٩)}

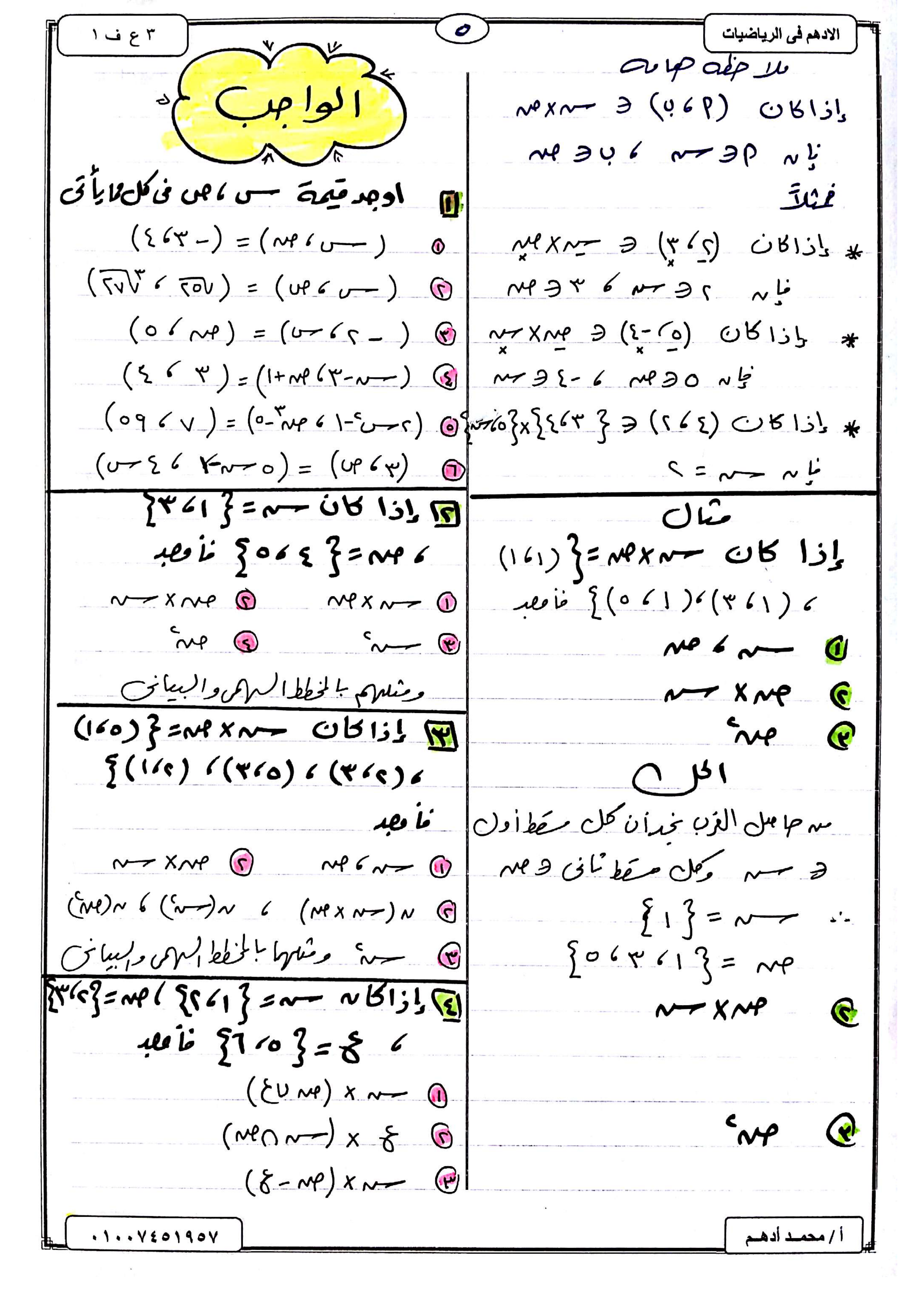
٥) س × (ص ∩ ع)
= {أ ، ب} × {٥ ، ٧}
= {(أ ، ٥) ، (أ ، ٧) ، (ب ، ٥) ، (ب ، ٧)}

٦) س × (ع − ص)
= {أ ، ب} × {٩}
= {(أ ، ٩) ، (ب ، ٩)}

تمرين يحل فى الحصة

إذا كانت س = {١} ، ص = {٢ ، ٣} ، ع = {٢ ، ٥ ، ٦}
مثل المجموعات بشكل فن ثم اوجد

١) س × ص
٢) ص × ع
٣) س × ع
٤) ص²
٥) (س × ص) ∪ (ص × ع)
٦) س × (ص ∩ ع)
٧) س × (ص ∪ ع)
٨) (ع − ص) × (س ∩ ص)



ملاحظة هامة

إذا كان (أ ، ب) ∈ س × ص

فإن أ ∈ س ، ب ∈ ص

فمثلاً

* إذا كان (٢ ، ٣) ∈ س × ص فإن ٢ ∈ س ، ٣ ∈ ص
* إذا كان (٥ ، -٤) ∈ ص × س فإن ٥ ∈ ص ، -٤ ∈ س
* إذا كان (٤ ، ٢) ∈ {٣ ، ٤} × {٥ ، س} فإن س = ؟

مثال

إذا كان س × ص = {(١ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٥)} فأوجد

١) س ، ص

٢) ص × س

٣) ص²

الحل

من حاصل الضرب نجد أن كل مسقط أول ∈ س وكل مسقط ثانى ∈ ص

∴ س = {١}

ص = {١ ، ٣ ، ٥}

٢) ص × س

٣) ص²

الواجب

١ أوجد قيمة س ، ص فى كل مما يأتى

① (س ، ص) = (-٣ ، ٤)

② (س ، ص) = ($\sqrt{٢٥}$ ، $\sqrt[٣]{٢٧}$)

③ (-٢ ، س) = (ص ، ٥)

④ (س - ٣ ، ص + ١) = (٣ ، ٤)

⑤ (٢س² - ١ ، ص³ - ٥) = (٧ ، ٥٩)

⑥ (٣ ، ص) = (٥س - ٢ ، ٤س)

٢ إذا كان س = {١ ، ٣} ، ص = {٤ ، ٥} فأوجد

① س × ص ② ص × س

③ س² ④ ص²

ومثلهم بالمخطط السهمى والبيانى

٣ إذا كان س × ص = {(٥ ، ١) ، (٢ ، ٣) ، (٥ ، ٣) ، (٢ ، ١)} فأوجد

① س ، ص ② ص × س

③ ن(س × ص) ، ن(س²) ، ن(ص²)

④ س² ومثلها بالمخطط السهمى والبيانى

٤ إذا كان س = {١ ، ٢} ، ص = {٢ ، ٣} ، ع = {٥ ، ٦} فأوجد

① س × (ص ∪ ع)

② ع × (س ∩ ص)

③ س × (ص - ع)

٥ إذا كان س = {١، ٢، ٣، ٤} ، ص = {٣، ٤، ٥}

فأوجد

① (س ∩ ص) × ص

② (س − ص) × ص

③ (ص − س) × س

٦ أكمل العبارات الآتية

① إذا كان س = {٣، ١} ، ص = {٤} فإن ص × س = ...

② {٥} × {٣}

③ إذا كان س = {١، ٢، ٥} فإن ن(س²) = -----

④ إذا كانت (٢، ٥) ∈ ص × س فإن (٥، ٥) ∈ ....
، (٢، ٢) ∈ ---
، (٥، ٢) ∈ ----

⑤ إذا كان س = {٢، ٣} فإن س × ϕ = ----

⑥ إذا كان س × ص = {(٢، ٦) ، (٢، ٩) ، (٣، ٦) ، (٣، ٩)
، (٥، ٦) ، (٥، ٩)}
فإن س = --- ، ص = ---

⑦ إذا كان س² = {(٣، ٣) ، (٣، ٥) ، (٥، ٣) ، (٥، ٥)}
فإن س = ----

⑧ إذا كان س × ص = {(١، ٧) ، (١، ٥)}
فإن {٥، ٧} ∈ ----
، (٥، ٧) ∈ ---

⑨ إذا كان ن(س) = ٣ ، ص = {١، ٢}
فإن ن(س × ص) = ----

⑩ إذا كان ن(س) = ٤ ، ن(س × ص) = ١٢
فإن ن(ص) = ---

⑪ إذا كان ن(س × ص) = ١٥
، ن(ص) = ٥ فإن ن(س) = ----

⑫ إذا كان ن(س²) = ٩
ن(ص) = ٤ فإن ن(س × ص)
= ----

⑬ ن(س²) = ٤ ، ن(ص²) = ٩
فإن ~~ن~~ (ص × س) = ----

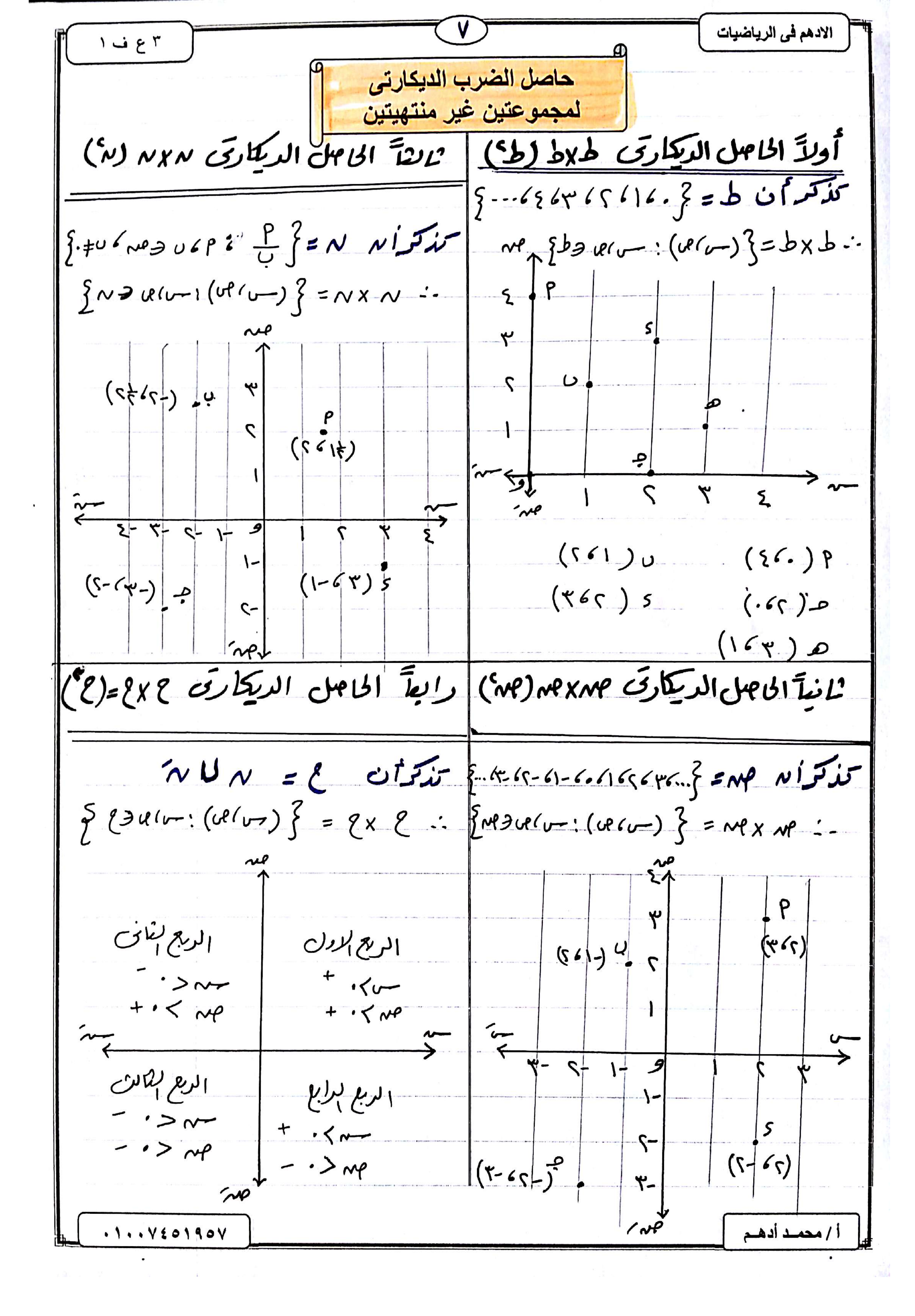
⑭ إذا كان ن(س²) = ٩
، ن(س × ص) = ١٥
فإن ن(ص²) = ---

⑮ إذا كان (س − ١، ١١) = (٨، ص + ٣)
فإن $\sqrt{\text{س} + ٢\text{ص}}$ = ----

⑯ إذا كان (س² − ٥ ، $\frac{\text{ص}}{٢}$) = (١١، ٢)
فإن س = --- ، ص = ---

⑰ إذا كان ($\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ ، ص + ٢) = (−١، ٥)
فإن $\text{ص}^{\text{س}}$ = ---

انتهت كفاية كده


حاصل الضرب الديكارتى لمجموعتين غير منتهيتين
أولاً الحاصل الديكارتى ط×ط (ط٢)
تذكر أن ط = {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ...}
∴ ط × ط = {(س، ص) : س، ص ∈ ط}
أ (٠، ٤)
ب (١، ٢)
جـ (٢، ٠)
د (٢، ٣)
هـ (٣، ١)
ثالثاً الحاصل الديكارتى ن×ن (ن٢)
تذكر أن ن = {أ/ب : أ، ب ∈ ص، ب ≠ ٠}
∴ ن × ن = {(س، ص) : س، ص ∈ ن}
أ (١/٢، ٢)
ب (-٢، ٢/٣)
جـ (-٣، -٢)
د (٣، -١)
ثانياً الحاصل الديكارتى ص×ص (ص٢)
تذكر أن ص = {...، -٣، -٢، -١، ٠، ١، ٢، ٣، ...}
∴ ص × ص = {(س، ص) : س، ص ∈ ص}
أ (٢، ٣)
ب (-١، ٢)
جـ (-٢، -٣)
د (٢، -٢)
رابعاً الحاصل الديكارتى ح×ح = (ح٢)
تذكر أن ح = ن ∪ ن'
∴ ح × ح = {(س، ص) : س، ص ∈ ح}
الربع الأول: س > ٠ +، ص > ٠ +
الربع الثانى: س < ٠ -، ص > ٠ +
الربع الثالث: س < ٠ -، ص < ٠ -
الربع الرابع: س > ٠ +، ص < ٠ -

شوية ملاحظات عنب

١) يسمى المستقيم ←→ س س′ محور السينات أو المحور الأفقى

ويسمى و س→ الاتجاه الموجب لمحور السينات

كما و س′← الاتجاه السالب لمحور السينات

٢) يسمى المستقيم ←→ ص ص′ محور الصادات أو المحور الرأسى

و ص→ الاتجاه الموجب لمحور الصادات

و ص′← الاتجاه السالب لمحور الصادات

٣) المستقيمان ←→ س س′ ، ←→ ص ص′ متعامدان لذلك تسمى الشبكة البيانية المتعامدة

٤) نقطة تقاطع المحورين تسمى بنقطة الأصل "و"

٥) لأى زوج مرتب (س ، ص) فإن س هو المسقط الأول "السينى" ص هو المسقط الثانى "الصادى"

٦) **المستقيمان** ←→ س س′ ، ←→ ص ص′ يقسمان المستوى إلى أربع أرباع

الربع الأول س > ٠ ، ص > ٠ (+ ، +)

الربع الثانى س < ٠ ، ص > ٠ (− ، +)

الربع الثالث س < ٠ ، ص < ٠ (− ، −)

الربع الرابع س > ٠ ، ص < ٠ (+ ، −)

٧) إذا كان الاحداثى السينى للنقطة يساوى صفر فإن النقطة تقع على محور **الصادات** (٠ ، ص)

٨) إذا كان الإحداثى الصادى للنقطة = صفر فإن النقطة تقع على محور **السينات** (س ، ٠)

مثال

اذكر الربع أو المحور الذى تقع عليه النقاط التالية.

١) أ (−١ ، ٣) ← الربع الثانى

ب (٣ ، ٥) ← الربع الاول

ج (٣ ، −٢) ← الربع الرابع

د (٠ ، ٤) ← محور الصادات

هـ (−٣ ، −٩) ← الربع الثالث

ل (−٥ ، ٠) ← محور السينات

م (٠ ، −٣) ← محور الصادات

ن (−٧ ، ٠) ← محور السينات

تدريب

أ (١ ، −٢) ←

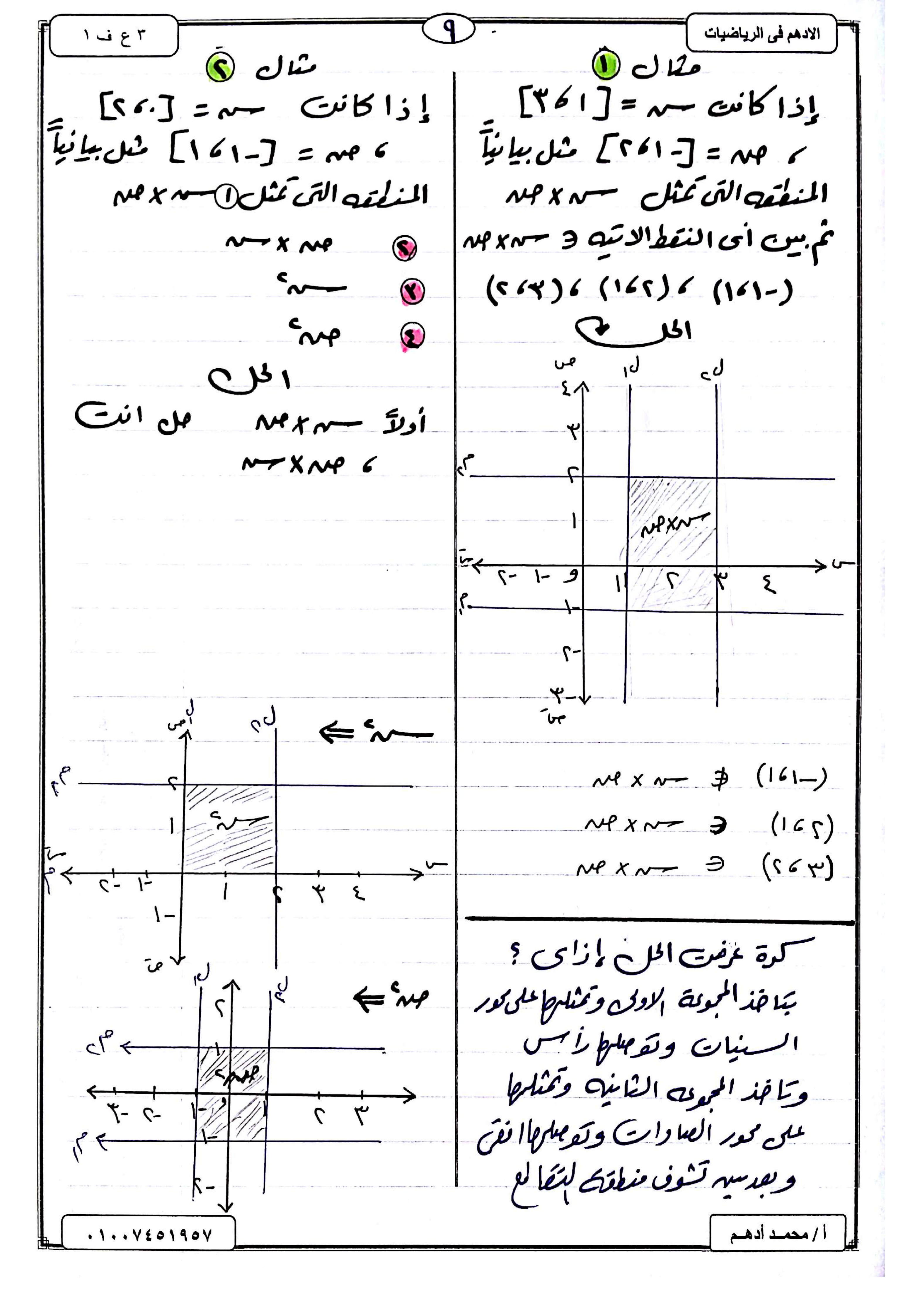
ب (−٣ ، ٥) ←

ج (٠ ، ٤) ←

د (٢ ، ٣) ←

هـ (−١ ، −٤) ←

و (٠ ، ٥) ←



مثال ١

إذا كانت س = [١ ، ٣]

، ص = [-١ ، ٢] مثل بيانياً

المنطقة التى تمثل س × ص

ثم بين أى النقط الاتية ∈ س × ص

(-١ ، ١) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ٢)

الحل

(-١ ، ١) ∉ س × ص

(٢ ، ١) ∈ س × ص

(٣ ، ٢) ∈ س × ص

كدة عرضت الحل إزاى ؟

بتاخذ المجموعة الاولى وتمثلها على محور السينيات وتوصلها رأسى

وتاخذ المجموعة الثانية وتمثلها على محور الصادات وتوصلها افقى

وبعديه تشوف منطقة التقاطع

مثال ٢

إذا كانت س = [٠ ، ٢]

، ص = [-١ ، ١] مثل بيانياً

المنطقة التى تمثل ① س × ص

② ص × س

③ س²

④ ص²

الحل

أولاً س × ص ، ص × س حل انت

س² ⇐

ص² ⇐

الواجب

١ على شبكة بيانية متعامدة للحاصل الديكارتى (ص × ص) عين النقاط الاتية وحدد الربع أو المحور الذى تقع عليه

أ (٢، ١)
ب (٥، -١)
جـ (٠، ٣)
د (-١، -٢)
هـ (٤، ٠)
م (-٣، ٢)
ل (٦، ٠)
ن (٤، -٢)

٢ على شبكة بيانية متعامدة عين
أ (-٢، ٣)   ب (٢، ٣)
جـ (٢، ٦)
ثم أوجد مساحة المثلث أ ب جـ
وعين طول $\overline{\text{أ جـ}}$.

٣ إذا كان س = [٢، ٤]
، ص = [-١، ٣] أوجد المنطقة التى تمثل

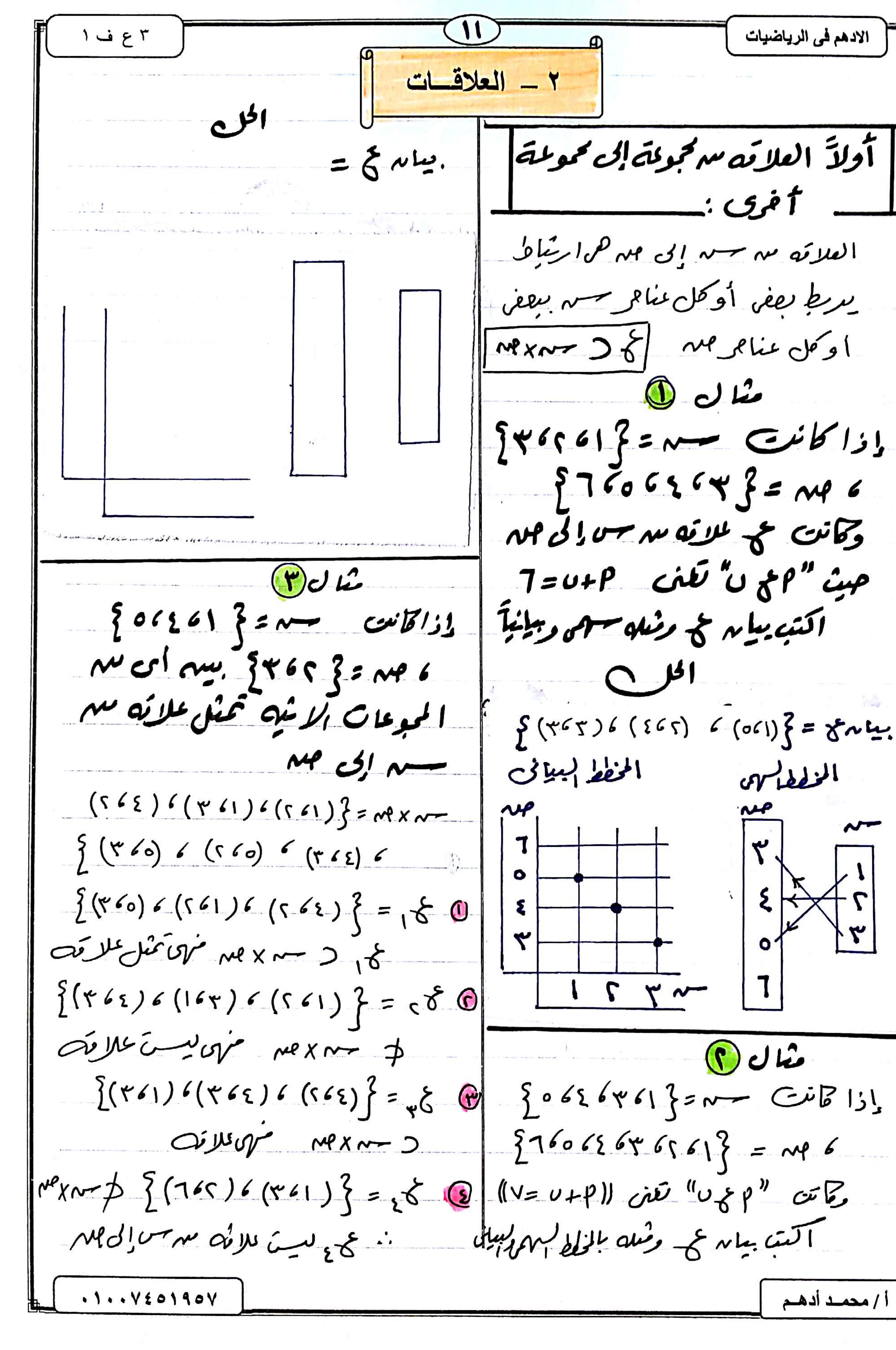
١) س × ص
٢) ص × س
٣) س٢   ٤) ص٢

٤ إذا كانت س = [-٢، ٣]
أوجد المنطقة التى تمثل س × س
ثم بين أى من النقاط الاتية ∈ س × س

أ (١، ٢)   ب (٣، -١)
جـ (-١، ٤)   د (-٢، ٠)

٥ أكمل العبارات الاتية:-

١) النقطة (-٢، ٣) تقع فى الربع ----
٢) إذا كانت (٥، ب-٧) على محور السينات فإن ب = ---
٣) إذا كانت (س+٢، ٩) تقع على محور الصادات فإن س = ---
٤) النقطة (٧، -٣) تقع فى الربع ---
٥) " (٣، ٠) تقع على محور ---
٦) " (-٦، -٤) تقع على محور ---
٧) إذا كانت (أ، ب) تقع فى الربع الاول فإن أ ب ... صفر
٨) إذا كانت (أ، ب) تقع فى الربع الثالث فإن أ ب --- صفر
٩) إذا كانت (أ، ب) تقع فى الربع الثانى فإن أ ب ... صفر
١٠) إذا كانت النقطة (أ، ب) تقع على محور الصادات فإن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ = ---



٢ ـ العلاقات

أولاً: العلاقة من مجموعة إلى مجموعة أخرى:

العلاقة من س إلى ص هي ارتباط يربط بعض أو كل عناصر س ببعض أو كل عناصر ص

ع ⊂ س × ص

مثال ①

إذا كانت س = {١، ٢، ٣}، ص = {٣، ٤، ٥، ٦}
وكانت ع علاقة من س إلى ص
حيث "أ ع ب" تعني أ + ب = ٦
اكتب بيان ع ومثلها سهمياً وبيانياً

الحل

بيان ع = {(١، ٥)، (٢، ٤)، (٣، ٣)}

مثال ②

إذا كانت س = {١، ٣، ٤، ٥}
، ص = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}
وكانت "أ ع ب" تعني (أ + ب = ٧)
اكتب بيان ع ومثلها بالمخطط السهمي والبياني

الحل

بيان ع =

مثال ③

إذا كانت س = {١، ٤، ٥}
، ص = {٢، ٣} بين أي من المجموعات الآتية تمثل علاقة من س إلى ص

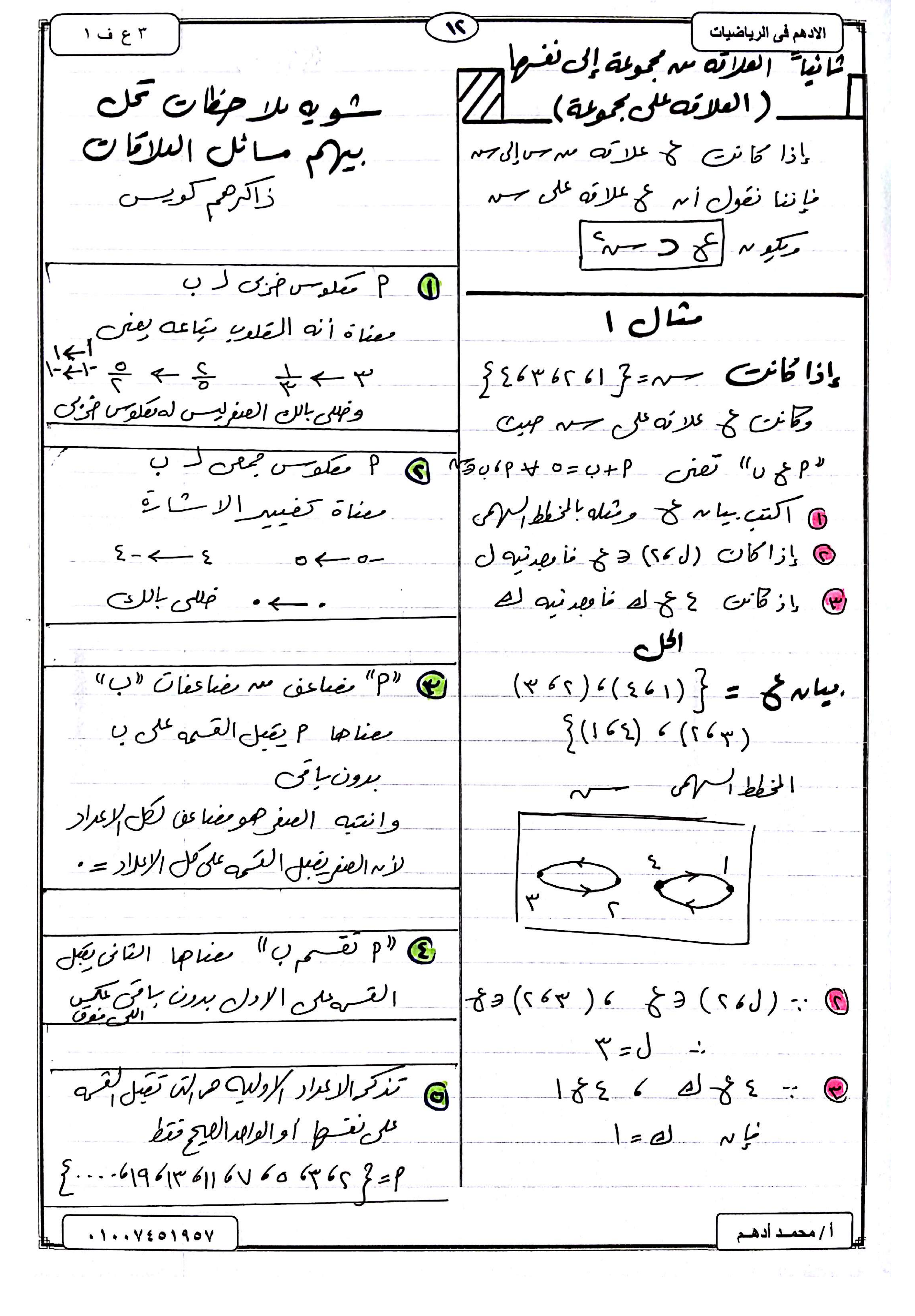
س × ص = {(١، ٢)، (١، ٣)، (٤، ٢)، (٤، ٣)، (٥، ٢)، (٥، ٣)}

① ع١ = {(٤، ٢)، (١، ٢)، (٥، ٣)}
ع١ ⊂ س × ص فهي تمثل علاقة

② ع٢ = {(١، ٢)، (٣، ١)، (٤، ٣)}
⊄ س × ص فهي ليست علاقة

③ ع٣ = {(٤، ٢)، (٤، ٣)، (١، ٣)}
⊂ س × ص فهي علاقة

④ ع٤ = {(١، ٣)، (٢، ٦)} ⊄ س × ص
∴ ع٤ ليست علاقة من س إلى ص



ثانياً العلاقة من مجموعة إلى نفسها (العلاقة على مجموعة)

إذا كانت ع علاقة من س إلى س فإننا نقول أن ع علاقة على س ويكون $ع \subset س^2$

مثال ١

إذا كانت س = {١، ٢، ٣، ٤} وكانت ع علاقة على س حيث "أ ع ب" تعني أ + ب = ٥ ∀ أ، ب ∈ س

① اكتب بيان ع ومثله بالمخطط السهمي

② إذا كان (ل، ٢) ∈ ع فاوجد قيمة ل

③ إذا كانت ٤ ع ك فاوجد قيمة ك

الحل

بيان ع = {(١، ٤)، (٢، ٣)، (٣، ٢)، (٤، ١)}

المخطط السهمي س

② ∵ (ل، ٢) ∈ ع ، (٣، ٢) ∈ ع
∴ ل = ٣

③ ∵ ٤ ع ك ، ٤ ع ١
فإن ك = ١

شوية ملاحظات تحل بيهم مسائل العلاقات

ذاكرهم كويس

① أ معكوس ضربي لـ ب
معناه أنه المقلوب بتاعه يعني
٣ ← ١/٣ ، ٥/٢ ← ٢/٥ ، ١ ← ١ ، -١ ← -١
وخلى بالك الصفر ليس له معكوس ضربي

② أ معكوس جمعي لـ ب
معناه تغيير الإشارة
-٥ ← ٥ ، ٤ ← -٤
٠ ← ٠ خلى بالك

③ "أ" مضاعف من مضاعفات "ب"
معناها أ يقبل القسمة على ب بدون باقي
وانتبه الصفر هو مضاعف لكل الأعداد
لأنه الصفر يقبل القسمة على كل الأعداد = ٠

④ "أ تقسم ب" معناها الثاني يقبل القسمة على الأول بدون باقي عكس اللي فوق

⑤ تذكر الأعداد الأولية هي التي تقبل القسمة على نفسها أو الواحد الصحيح فقط
أ = {٢، ٣، ٥، ٧، ١١، ١٣، ١٩، ...}

الواجب

مثال ١ فى كل مما يلى اكتب بيان ع ومثله بالمخطط السهمى وآخر بيانى حيث أ ع ب ، أ ∈ س ، ب ∈ ص

① س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}
"أ ع ب" تعنى أ + ب = ٧

② س = {٢ ، ٤ ، ٥ ، ٧} ، ص = {٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٩}
"أ ع ب" تعنى أ ≥ ب

③ س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {١ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{5}$}
"أ ع ب" تعنى «أ معكوس ضربى لـ ب»

④ س = {٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {١ ، ٢ ، ٤ ، ٦}
"أ ع ب" تعنى «أ + ب = عدد فردى»

⑤ س = {٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١١ ، ١٥}
"أ ع ب" تعنى أ تقسم ب

⑥ س = {٢ ، ١ ، ٠ ، $\frac{1}{2}$}
أ ع ب تعنى «أ معكوس ضربى لـ ب»
حيث أ ، ب ∈ س

ملحوظة تذكر الصفر ليس له معكوس ضربى

⑦ س = {١ ، ٢ ، ٤ ، ٦}
"أ ع ب" تعنى «أ مضاعف لـ ب»

⑧ س = {-١ ، ٠ ، ١}
"أ ع ب" تعنى أ = ب²
حيث أ ، ب ∈ س

مثال ٢ إذا كانت س = {٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {١ ، ٤} بين أى من المجموعات الآتية تكون علاقة من س إلى ص

① ع١ = {(٤ ، ١) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٤)}

② ع٢ = {(٤ ، ٤) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٤ ، ١)}

③ ع٣ = {(٢ ، ١) ، (٣ ، ١) ، (٤ ، ١)}

④ ع٤ = {(٢ ، ٤) ، (٤ ، ٤)}

استراحة بسيطة

أكمل

١- كم مرة وقف رمضان صبحى على الكرة ---

٢- كم عدد المرات التى حصل فيها نادى الزمالك على بطولة الدورى العام ---

٣- ماذا كانت نتيجة ماتش ٦ : ١ أى حد ذاكروا بقة ---

٣ – الدالة (التطبيق)

تعلمنا فى الدرس السابق مفهوم العلاقة وانتوا طبعاً احسن ناس بتحل علاقات صح ؟

** السؤال المهم متى تكون العلاقة دالة ؟

(١) كل عنصر من س يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط من احد الازواج المرتبة التى تنتمى إلى بيان ع

(٢) كل عنصر من س يخرج منه سهم واحد فقط من المخطط السهمى

(٣) كل خط رأسى تقع عليه نقطة واحدة فقط من المخطط البيانى للعلاقة ع

مثال (١)

إذا كانت س = {١، ٢، ٣} ، ص = {٣، ٤، ٥} نبين أى من العلاقات الاتية تمثل دالة

(١) $ع_١$ = {(١، ٥) ، (٢، ٤) ، (٣، ٦)}

العلاقة تمثل دالة لأنه كل عنصر من س ظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط

(٢) $ع_٢$ = {(١، ٦) ، (٢، ٥) ، (٣، ٣) ، (٢، ٣)}

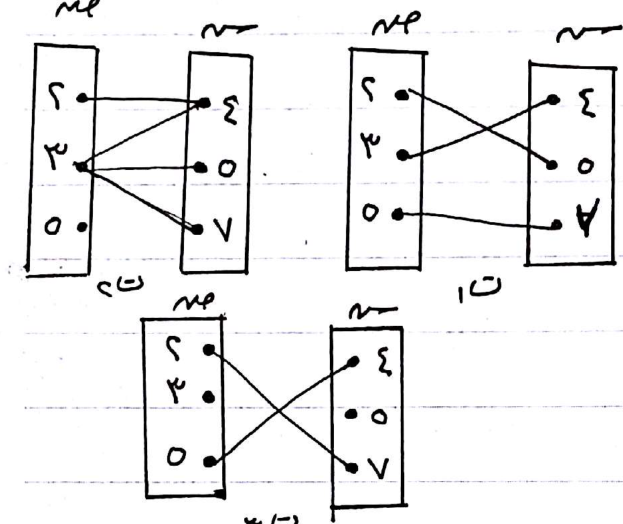
ليست دالة لأن العنصر "٢" ظهر كمسقط أول مرتين

(٣) $ع_٣$ = {(٢، ٦) ، (٣، ٥)}

ليست دالة لأنه العنصر "١" لم يظهر كمسقط أول من احد الازواج المرتبة.

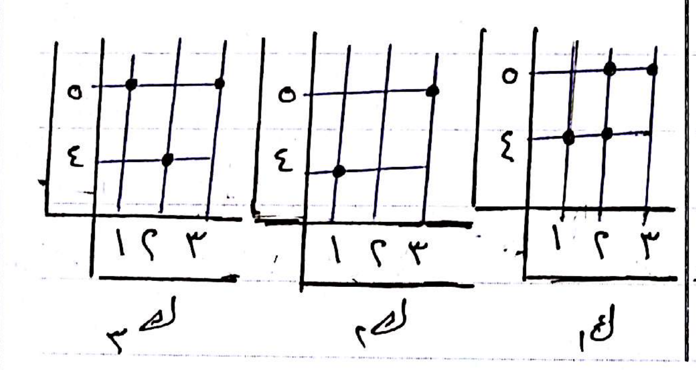
تدريب

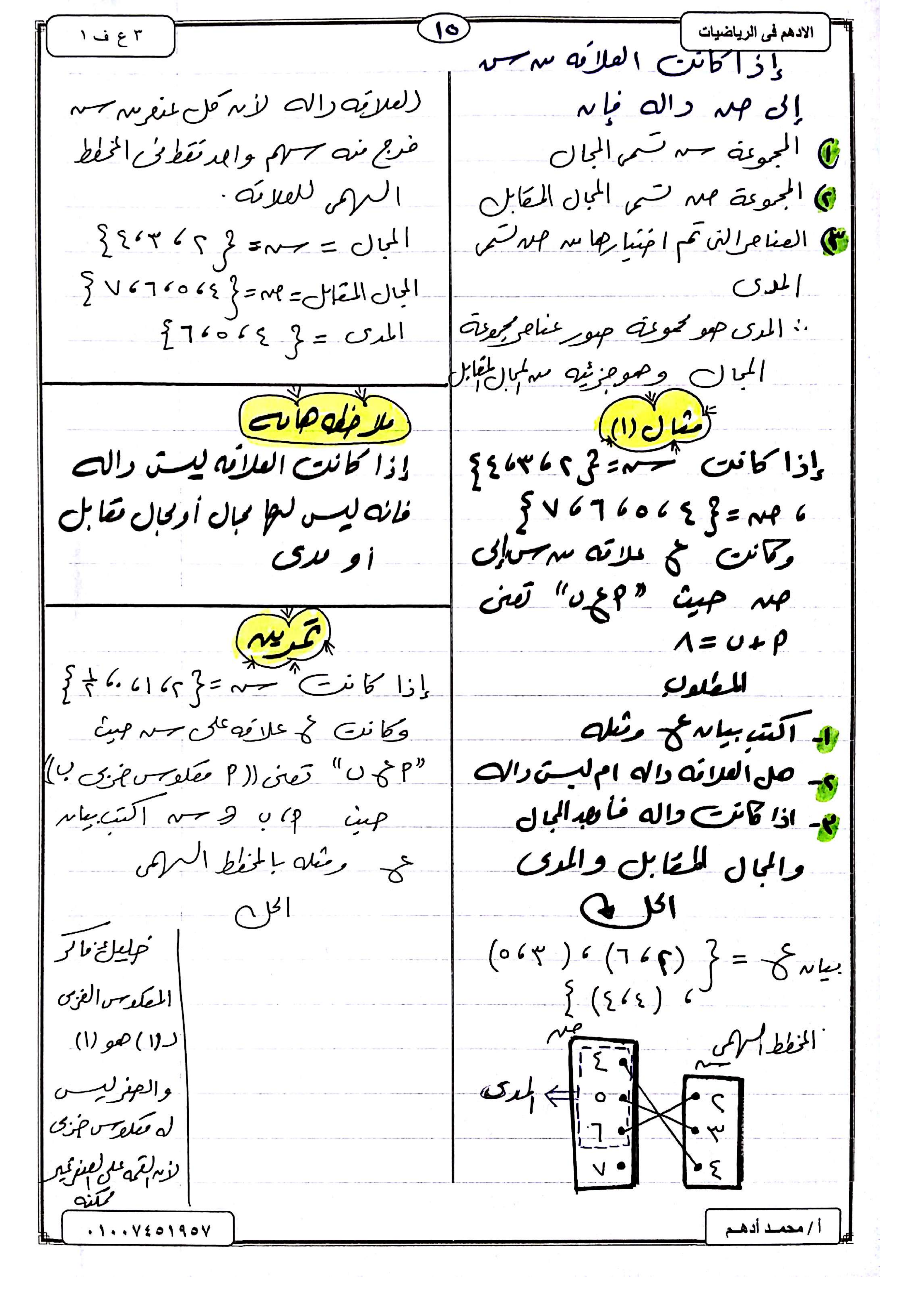
إذا كانت س = {٤، ٥، ٧} ، ص = {٢، ٣، ٥} بين أى من المخططات السهمية الاتية تمثل دالة



تدريب ثانى

إذا كانت س = {١، ٢، ٣} ، ص = {٤، ٥} بين أى من المخططات البيانية التى تمثل دالة





إذا كانت العلاقة من س إلى ص دالة فإن

١) المجموعة س تسمى المجال

٢) المجموعة ص تسمى المجال المقابل

٣) العناصر التي تم اختيارها من ص تسمى المدى

∴ المدى هو مجموعة صور عناصر مجموعة المجال وهو جزئية من المجال المقابل

مثال (١)

إذا كانت س = {٢، ٣، ٤} ، ص = {٤، ٥، ٦، ٧}

وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث "أ ع ب" تعني أ + ب = ٨

المطلوب

١- اكتب بيان ع ومثله

٢- هل العلاقة دالة أم ليست دالة

٣- اذا كانت دالة فأوجد المجال والمجال المقابل والمدى

الحل

بيان ع = {(٢، ٦)، (٣، ٥)، (٤، ٤)}

المخطط السهمي

العلاقة دالة لأنه كل عنصر من س خرج منه سهم واحد فقط في المخطط السهمي للعلاقة.

المجال = س = {٢، ٣، ٤}

المجال المقابل = ص = {٤، ٥، ٦، ٧}

المدى = {٤، ٥، ٦}

ملاحظة هامة

إذا كانت العلاقة ليست دالة فإنه ليس لها مجال أو مجال مقابل أو مدى

تدريب

إذا كانت س = {٢، ١، ٠، ½} وكانت ع علاقة على س حيث "أ ع ب" تعني (أ معكوس ضربي ب) حيث أ، ب ∈ س اكتب بيان ع ومثله بالمخطط السهمي

الحل

خليك فاكر المعكوس الضربي لـ (١) هو (١) والصفر ليس له معكوس ضربي لأنه القسمة على الصفر غير ممكنة

الواجب

١) فى كل مما يلى اكتب بيان ع ومثله بالمخطط السهمى وآخر بيانى وحدد إذا كانت العلاقة دالة أم لا وإذا كانت دالة فأوجد المجال والمجال المقابل والمدى

(١) س = {٢، ٣، ٤}
ص = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٧، ٨}
"أ ع ب" تعنى (أ = $\frac{1}{2}$ ب)

(٢) س = {١، ٢، ٣} ، ص = {١، ٣، ٦، ٩، ١٢}
"أ ع ب" تعنى "(أ = $\frac{1}{3}$ ب)"

(٣) س = {٤، ٦، ٨، ١٠}
ص = {٢، ٣، ٤، ٥}
"أ ع ب" تعنى "(أ = ٢ ب)"

(٤) س = {٢، ٤، ٥، ٧}
ص = {٤، ٥، ٦، ٧، ٩}
"أ ع ب" تعنى "(أ ≥ ب)"

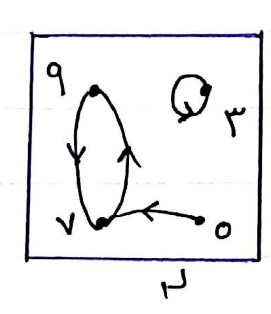
(٥) س = {٠، ١، ٢، ٣}
ص = {٠، ١، ٤، ٨، ٩}
أ ع ب تعنى "(أ^2 = ب)"

(٦) س = {١، ٢، ٤}
"أ ع ب" تعنى "أ ضعف ب"

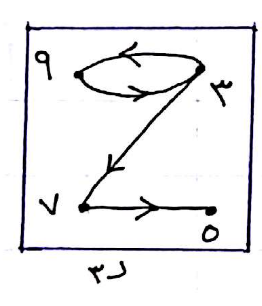
(٧) س = {٢، ٣، ٤} ، ص = {٦، ٨، ١٠، ١١، ١٥}
"أ ع ب" تعنى "أ تقسم ب"

٢) إذا كانت س = {١، ٣، ٥}
، ع دالة على س ، بيانها ع
= {(أ، ٣)، (١، ب)، (١، ٥)}
فأوجد القيمة العددية أ + ب

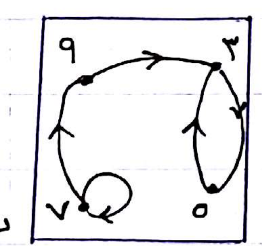
٣) إذا كانت س = {٣، ٥، ٧، ٩}
فبين أى من المخططات الآتية يمثل دالة



د١



د٢



د٣

٤) أكمل

١- إذا كانت د تمثل دالة من س إلى ص فإن س تسمى ..... ، ص تسمى ..... ، مجموعة صور عناصر المجال (س) يسمى .....

٢- إذا كانت ع دالة بيانها ع = {(١، ٢)، (٢، ٥)، (٤، ٧)} فإن مداها = ...

٣- مدى الدالة من الشكل هو .....

٤ – دوال كثيرات الحدود

التعبير الرمزي عن الدالة:

(١) يرمز للدالة عادة بأحد الرموز (د أو ن أو هـ أو ....)

(٢) فإذا كانت د دالة من المجموعة س إلى المجموعة ص فإننا نكتب
د : س ← ص
أو د(س) = ص
حيث س ∈ س ، ص ∈ ص

(٣) وإذا كانت د دالة من س إلى س
فإن د : س ← س
ونقول د دالة على س

الدالة كثيرة الحدود

الدالة كثيرة الحدود هي دالة قاعدتها (صورة س) هي حد أو مقدار جبري ولابد أن يتوفر لشرطان

(١) كل من المجال والمجال المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح

(٢) قوة (أس) المتغير س في أي حد من حدود قاعدتها هو عدد طبيعي

ملاحظة هامة قوي

يجب التعرف على ما إذا كانت الدالة كثيرة حدود أم لا قبل وضع قاعدتها في أبسط صورة

مثال (١)

بين أي من الدوال الآتية كثيرة حدود

(١) الدالة د : د(س) = ٣
الدالة د : د(س) = ٢س + ٥
الدالة ر : ر(س) = س² + ٢س − ٥
الدالة س : س(س) = ٢س² − ½ س

(٢) الدالة ن : ن(س) = س² + √س − ٣
الدالة هـ : هـ(س) = س³ + 1/س
الدالة م : م(س) = س(س + 3/س)

لاحظ جيداً : الدالة د : د(س) = س(1/س) ليست كثيرة حدود
، س(س + 3/س) ليست كثيرة حدود على الرغم أنه عند الاختصار تكون (س² + ٣) ⇐ ولكنها تكون صورة أخرى للدالة أخرى

درجة الدالة

هي أكبر قوة للمتغير في قاعدة الدالة

مثلاً

(١) د₁(س) = ٣س − ٢ من الدرجة الأولى (خطية)

(٢) د₂(س) = س² − ٥س من الدرجة الثانية (تربيعية)

(٣) د₃(س) = س³ − ٢س² + ٧س
من الدرجة الثالثة (تكعيبية)

(٤) د₄(س) = ٧ ثابتة (صفرية)

ملاحظة هامة على درجة الدالة الثابتة

* $د(س) = أ$ حيث $أ \in ح - \{٠\}$
كثيرة حدود من الدرجة صفر (دالة ثابتة)

* وفى حالة $أ = ٠$ أى عندما
$د(س) = ٠$ فإن الدالة ليس لها درجة

عند بحث درجة الدالة يجب تبسيط قاعدتها إلى أبسط صورة قبل تعيين درجتها

مثال (١)

اذكر درجة كل من الدوال الاتية

(١) $د(س) = ٥ - ٣س$
من الدرجة الأولى (دالة خطية)

(٢) $د(س) = ٣س - س^٢$
من الدرجة الثانية (دالة تربيعية)

(٣) $د(س) = ٥س - ٣س^٢ + س^٣$
من الدرجة الثالثة (دالة تكعيبية)

(٤) $د(س) = س^٢(٢ + س^٢)$
$س^٢ \times س^٢ = س^٤$ أعلى أس من الدرجة الرابعة

(٥) $د(س) = س(س^٣ + س^٢) - س^٢(س^٢ - ٢س)$
$= س^٤ + س^٣ - س^٤ + ٢س^٣$
$= س^٣ + ٢س^٣ = ٣س^٣$
من الدرجة الثالثة
(دالة تكعيبية)

مثال (٢)

إذا كانت د: $د(س) = س^٢ - ٢س + ٥$

(١) أوجد د(١) ، د(٠) ، د(-٢)
د($\frac{١}{٢}$) ، د($\sqrt{٥}$)

الحل

$د(١) = (١)^٢ - ٢(١) + ٥ = ١ - ٢ + ٥$
$= ٤$

$د(٠) = (٠)^٢ - ٢(٠) + ٥ = ٥$

$د(-٢) = (-٢)^٢ - ٢(-٢) + ٥ = ١٣$

$د(\frac{١}{٢}) =$

$د(\sqrt{٥}) =$

$د(-١) =$

مثال (٣)

إذا كانت $د(س) = س^٢ - ٣س$
، $ر(س) = س - ٣$

فأوجد (١) د(٢) - ر(٥)

(٢) اثبت أن د(٣) = ر(٣) = صفر

الحل

(١) $د(٢) = ٢^٢ - ٣ \times ٢ = ٤ - ٦ = -٢$
$ر(٥) = ٥ - ٣ = ٢$
$\therefore د(٢) - ر(٥) = -٢ - ٢ = -٤$

(٢) $د(٣) = ٣^٢ - ٣ \times ٣ = ٩ - ٩ =$ صفر
$ر(٣) = ٣ - ٣ =$ صفر

ذاكر // افهم // ركز
وادفع فلوس الدرس تبقى ممتاز

إزاى تجيب قاعدة الدالة من بيانها مع "ركز معايا"

مثال (١)

إذا كان بيان الدالة

د = {(٠، ٤)، (١، ٣)، (٢، ٢)، (٣، ١)}

اكتب المجال = {٠، ١، ٢، ٣}

المدى = {٤، ٣، ٢، ١}

حدد قاعدة الدالة

نلاحظ أن مجموع س، ص (د(س)) = ٤

∴ س + د(س) = ٤

د(س) = ٤ − س قاعدة الدالة

مثال (٢)

إذا كان بيان الدالة د = {(١، ٣)، (٢، ٥)، (٣، ٧)، (٤، ٩)، (٥، ١١)}

فأوجد المجال =

المدى =

قاعدة الدالة ←

ص = ٢ س + ١

∴ قاعدة الدالة د(س) = ٢س + ١

الواجب

١ أى من الدالة الآتية تمثل كثيرة حدود (عين درجتها إذا كانت كثيرة حدود)

١) د: د(س) = ٢س − ٥

٢) د: د(س) = ٣

٣) د: د(س) = س + $\frac{1}{س}$

٤) د: د(س) = $س^{٣}$ + $س^{٢}$ + ٣

٥) د: د(س) = $س^{٢}$ + $\sqrt{س}$ + ٨

٦) د: د(س) = س ($س^{٢}$ + $س^{-٢}$ − ٤)

٧) د: د(س) = س ($س^{٢}$ + ٧)

٢ إذا كانت د: د(س) = $س^{٢}$ − ٣

فأوجد د(١)، د(−١)، د(٠)، د(٢)

٣ إذا كانت د دالة على س حيث س = {٣، ٤، ٥، ٦} وكان

د(٣) = ٣، د(٤) = ٥

د(٥) = ٥، د(٦) = ٥

١) مثل د بمخطط سهمى

٢) اكتب بيان د واذكر مداها

٤ إذا كانت د: د(س) = س − ٤ فإن د(٧) = --- ومجال د = ---

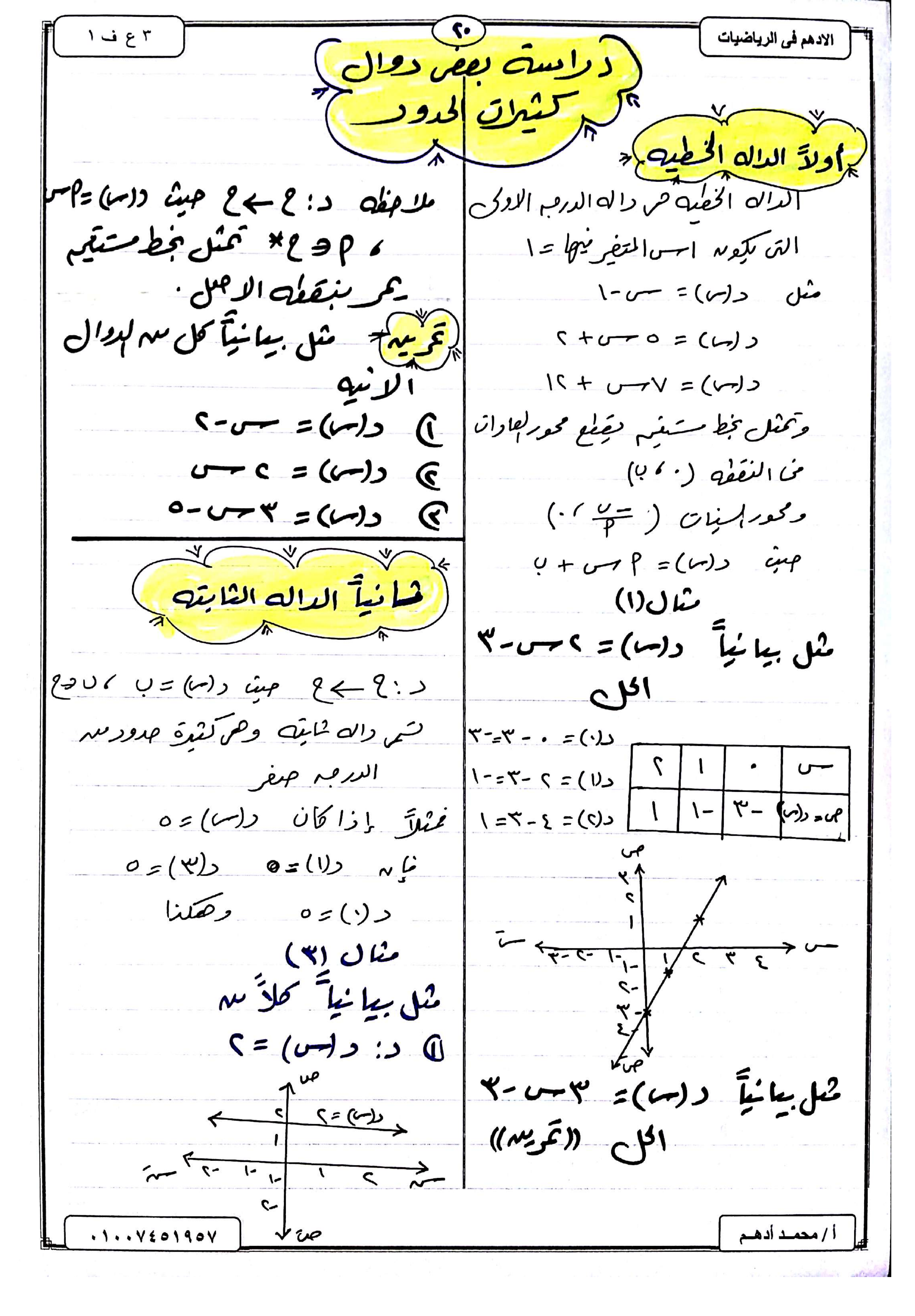
٥ إذا كانت د(س) = $س^{٢}$ − س + ٣ فإن د(−٣) = ---

٦ د(س) = ٥$س^{٢}$ + ٧ من الدرجة ----

٧ مجموعة صور عناصر مجال الدالة تسمى ---

٨ د(س) = $س^{٢}$ − $\sqrt{٢}$ س فإن د($\sqrt{٢}$) = ---

٩ د(س) = ك س + ٨، د(٢) = صفر فإن ك =



دراسة بعض دوال كثيرات الحدود

أولاً الداله الخطيه

الداله الخطيه هى داله الدرجه الاولى التى يكون اس المتغير فيها = ١

مثل د(س) = س - ١

د(س) = ٥س + ٢

د(س) = ٧س + ١٢

وتمثل بخط مستقيم يقطع محور الصادات فى النقطه (٠ ، ب)

ومحور السينات ($\frac{-ب}{أ}$ ، ٠)

حيث د(س) = أ س + ب

مثال (١)

مثل بيانياً د(س) = ٢س - ٣

الحل

د(٠) = ٠ - ٣ = -٣

د(١) = ٢ - ٣ = -١

د(٢) = ٤ - ٣ = ١

س	٠	١	٢
ص = د(س)	-٣	-١	١

مثل بيانياً د(س) = ٣س - ٣

الحل ((تمرين))

ملاحظه د: ح ← ح حيث د(س) = أس ، أ ∈ ح * تمثل بخط مستقيم يمر بنقطه الاصل.

تمرين مثل بيانياً كل من الدوال الاتيه

١) د(س) = س - ٢

٢) د(س) = ٢س

٣) د(س) = ٣س - ٥

ثانياً الداله الثابته

د: ح ← ح حيث د(س) = ب ، ب ∈ ح

تسمى داله ثابته وهى كثيرة حدود من الدرجه صفر

فمثلاً إذا كان د(س) = ٥

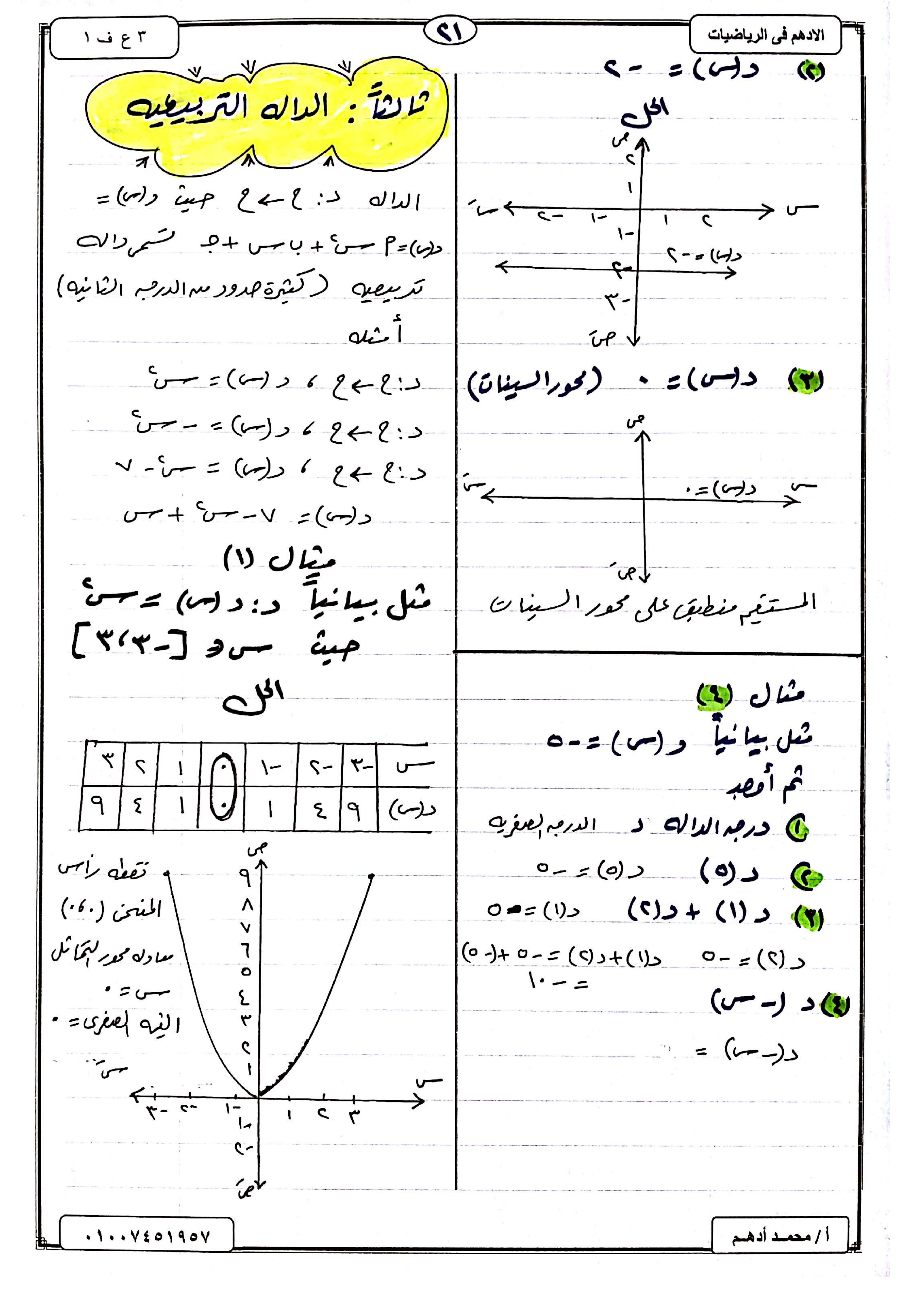
فإن د(١) = ٥ د(٣) = ٥

د(٠) = ٥ وهكذا

مثال (٣)

مثل بيانياً كلاً من

١) د: د(س) = ٢



(٢) د(س) = -٢

الحل

(٣) د(س) = ٠ (محور السينات)

المستقيم منطبق على محور السينات

مثال (٤)

مثل بيانياً د(س) = -٥

ثم أوجد

(١) درجة الدالة د — الدرجة الصفرية

(٢) د(٥) — د(٥) = -٥

(٣) د(١) + د(٢) — د(١) = -٥

د(٢) = -٥ — د(١) + د(٢) = -٥ + (-٥) = -١٠

(٤) د(-س)

د(-س) =

ثالثاً: الدالة التربيعية

الدالة د: ح ← ح حيث د(س) = أ س^2 + ب س + جـ تسمى دالة تربيعية (كثيرة حدود من الدرجة الثانية)

أمثلة

د: ح ← ح ، د(س) = س^2

د: ح ← ح ، د(س) = -س^2

د: ح ← ح ، د(س) = س^2 - ٧

د(س) = ٧ - س^2 + س

مثال (١)

مثل بيانياً د: د(س) = س^2 حيث س ∈ [-٣، ٣]

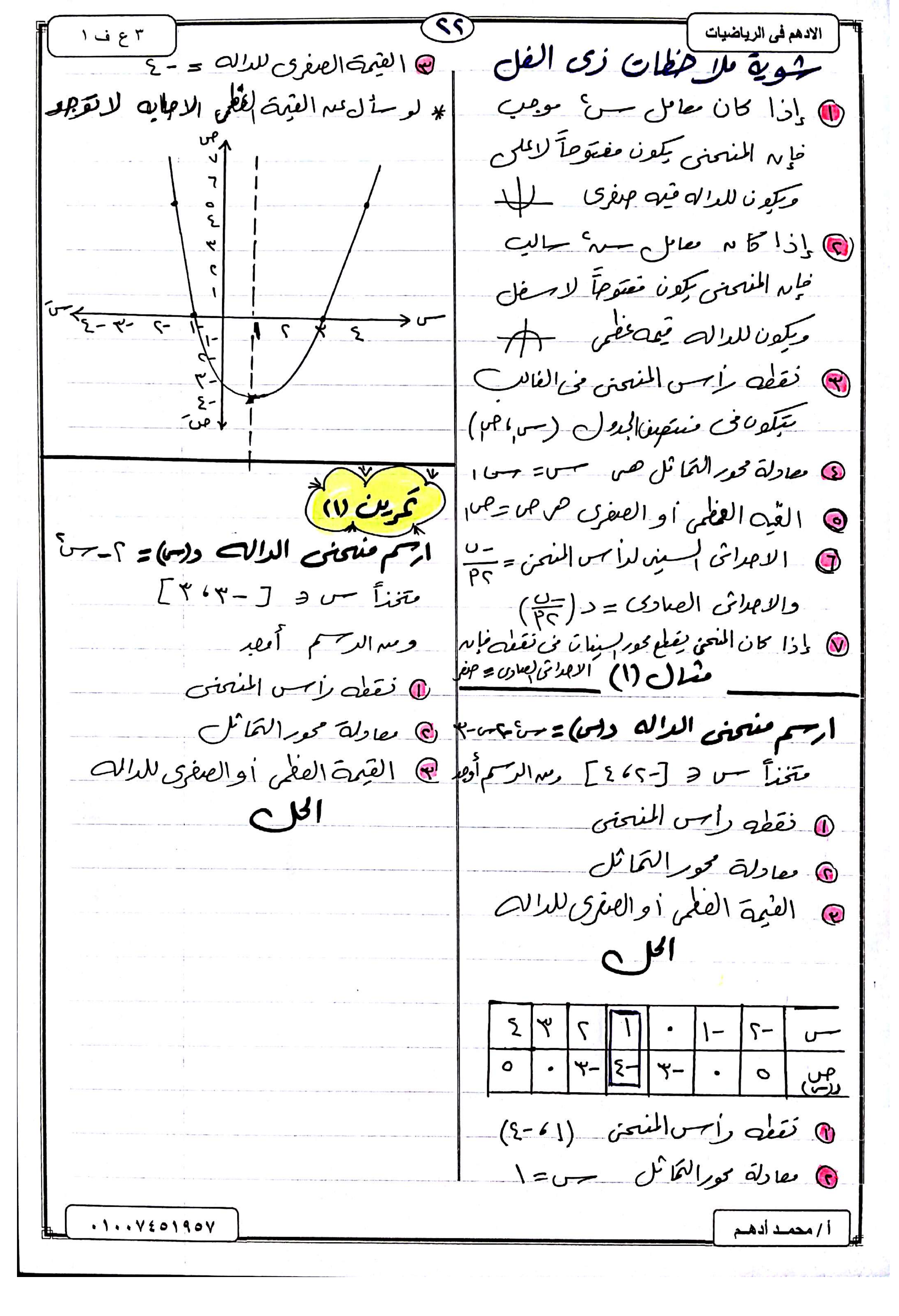
الحل

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
د(س)	٩	٤	١	٠	١	٤	٩

نقطة رأس المنحنى (٠،٠)

معادلة محور التماثل س = ٠

القيمة الصغرى = ٠



شوية ملاحظات زى الفل

1) إذا كان معامل $س^2$ موجب فإن المنحنى يكون مفتوحاً لأعلى ويكون للدالة قيمة صغرى

2) إذا كان معامل $س^2$ سالب فإن المنحنى يكون مفتوحاً لأسفل ويكون للدالة قيمة عظمى

3) نقطة رأس المنحنى في الغالب بتكون في منتصف الجدول $(س_1 ، ص_1)$

4) معادلة محور التماثل هي $س = س_1$

5) القيمة العظمى أو الصغرى هي $ص = ص_1$

6) الاحداثي السيني لرأس المنحنى $= \frac{-ب}{2أ}$

والاحداثي الصادي $= د\left(\frac{-ب}{2أ}\right)$

7) إذا كان المنحنى يقطع محور السينات في نقطة فإن الاحداثي الصادي = صفر

مثال (1)

ارسم منحنى الدالة $د(س) = س^2 - 2س - 3$ متخذاً $س \in [-2 ، 4]$ ومن الرسم أوجد

1) نقطة رأس المنحنى
2) معادلة محور التماثل
3) القيمة العظمى أو الصغرى للدالة

الحل

س	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
ص د(س)	٥	٠	-٣	-٤	-٣	٠	٥

1) نقطة رأس المنحنى (١ ، -٤)

2) معادلة محور التماثل س = ١

3) القيمة الصغرى للدالة = -٤

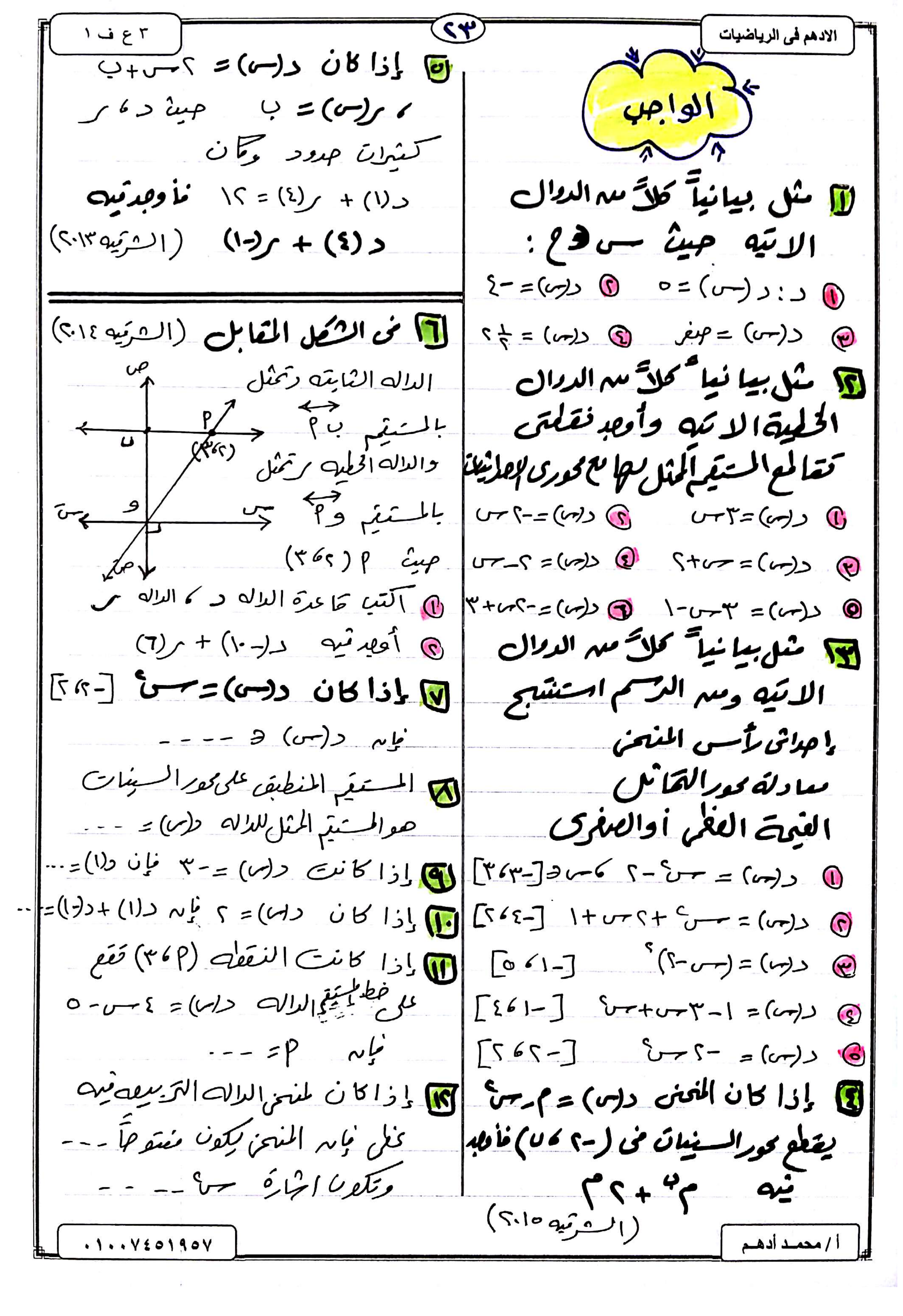
* لو سأل عن القيمة العظمى الإجابة لا توجد

تمرين (1)

ارسم منحنى الدالة $د(س) = 2 - س^2$ متخذاً $س \in [-3 ، 3]$ ومن الرسم أوجد

1) نقطة رأس المنحنى
2) معادلة محور التماثل
3) القيمة العظمى أو الصغرى للدالة

الحل



الواجب

١ مثل بيانياً كلاً من الدوال الآتية حيث س ∈ ح :

① د : د(س) = ٥ ② د(س) = -٤

③ د(س) = صفر ④ د(س) = ٢ $\frac{1}{2}$

٢ مثل بيانياً كلاً من الدوال الخطية الآتية وأوجد نقطتي تقاطع المستقيم الممثل لها مع محوري الإحداثيات

① د(س) = ٣س ② د(س) = -٢س

③ د(س) = س + ٢ ④ د(س) = ٢ - س

⑤ د(س) = ٣س - ١ ⑥ د(س) = -٢س + ٣

٣ مثل بيانياً كلاً من الدوال الآتية ومن الرسم استنتج

إحداثي رأس المنحنى

معادلة محور التماثل

القيمة العظمى أو الصغرى

① د(س) = س² - ٢ ، س ∈ [-٣ ، ٣]

② د(س) = س² + ٢س + ١ [-٤ ، ٢]

③ د(س) = (س - ٢)² [-١ ، ٥]

④ د(س) = ١ - ٣س + س² [-١ ، ٤]

⑤ د(س) = -٢س² [-٢ ، ٢]

٤ إذا كان المنحنى د(س) = م س² يقطع محور السينات في (-٢ ، ل) فأوجد قيمة م³ + ٢م

(الشرقية ٢٠١٥)

٥ إذا كان د(س) = ٢س + ب ، ر(س) = ب حيث د ، ر كثيرات حدود وكان د(١) + ر(٤) = ١٢ فأوجد قيمة د(٤) + ر(-١) (الشرقية ٢٠١٣)

٦ من الشكل المقابل (الشرقية ٢٠١٤)

الدالة الثابتة ر تمثل بالمستقيم ب أ ↔

والدالة الخطية د تمثل بالمستقيم و أ ↔

حيث أ (٢ ، ٣)

① اكتب قاعدة الدالة د ، الدالة ر

② أوجد قيمة د(-١٠) + ر(٦)

٧ إذا كان د(س) = س² [-٢ ، ٢] فإن د(س) ∈ ----

٨ المستقيم المنطبق على محور السينات هو المستقيم الممثل للدالة د(س) = ---

٩ إذا كانت د(س) = -٣ فإن د(١) = ...

١٠ إذا كان د(س) = ٢ فإن د(١) + د(-١) = ...

١١ إذا كانت النقطة (أ ، ٣) تقع على خط مستقيم الدالة د(س) = ٤س - ٥ فإن أ = ---

١٢ إذا كان لمنحنى الدالة التربيعية قيمة عظمى فإن المنحنى يكون مفتوحاً ---- وتكون إشارة س² ----

١ - النسبة

تعريف النسبة

النسبة بين الكميتين أ ، ب هى عدد مرات احتواء العدد أ على العدد ب

وتكتب

أ : ب أو $\frac{أ}{ب}$

ويسمى أ مقدم النسبة ، ب تالى النسبة

، أ و ب معاً حدى النسبة

خواص النسبة

خاصية (١)

النسبة لاتتغير إذا ضرب حداها فى أو قسما على عدد حقيقى لايساوى صفر

$\frac{٣}{٥} = \frac{٣ \times ٢}{٥ \times ٢} = \frac{٦}{١٠}$ وهكذا

وكذلك $\frac{٨}{١٠} = \frac{٨ \div ٢}{١٠ \div ٢} = \frac{٤}{٥}$

خاصية (٢)

النسبة تتغير إذا أضيف إلى أو طرح من حديها عدد حقيقى لايساوى الصفر

$\frac{٣}{٥} \neq \frac{٣+٥}{٥+٥} \neq \frac{٨}{١٠}$

خاصية (٣)

حاصل ضرب الطرفين = الوسطين

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$

فإن أ × د = ب × جـ

ملاحظة

إذا كانت النسبة بين عددين ٣ : ٥

فإننا نفرض أن العدد الأول = ٣ س والثانى ٥ س

((أو أى ثابت آخر))

مثال (١)

عددان صحيحان النسبة بينهما ٣ : ٤ وإذا أضيف للعدد الأصغر ٤ ، وطرح من العدد الأكبر ٣ صارت النسبة ٨ : ٩ أوجد العددين

الحل

نفرض أن العدد الأصغر = ٣ س

والعدد الأكبر = ٤ س

$\therefore \frac{٣س + ٤}{٤س - ٣} = \frac{٨}{٩}$

٩ (٣ س + ٤) = ٨ (٤ س - ٣)

٢٧ س + ٣٦ = ٣٢ س - ٢٤

٢٧ س - ٣٢ س = - ٢٤ - ٣٦

- ٥ س = - ٦٠

س = $\frac{-٦٠}{-٥}$ = ١٢

∴ العدد الأصغر = ٣ × ١٢ = ٣٦

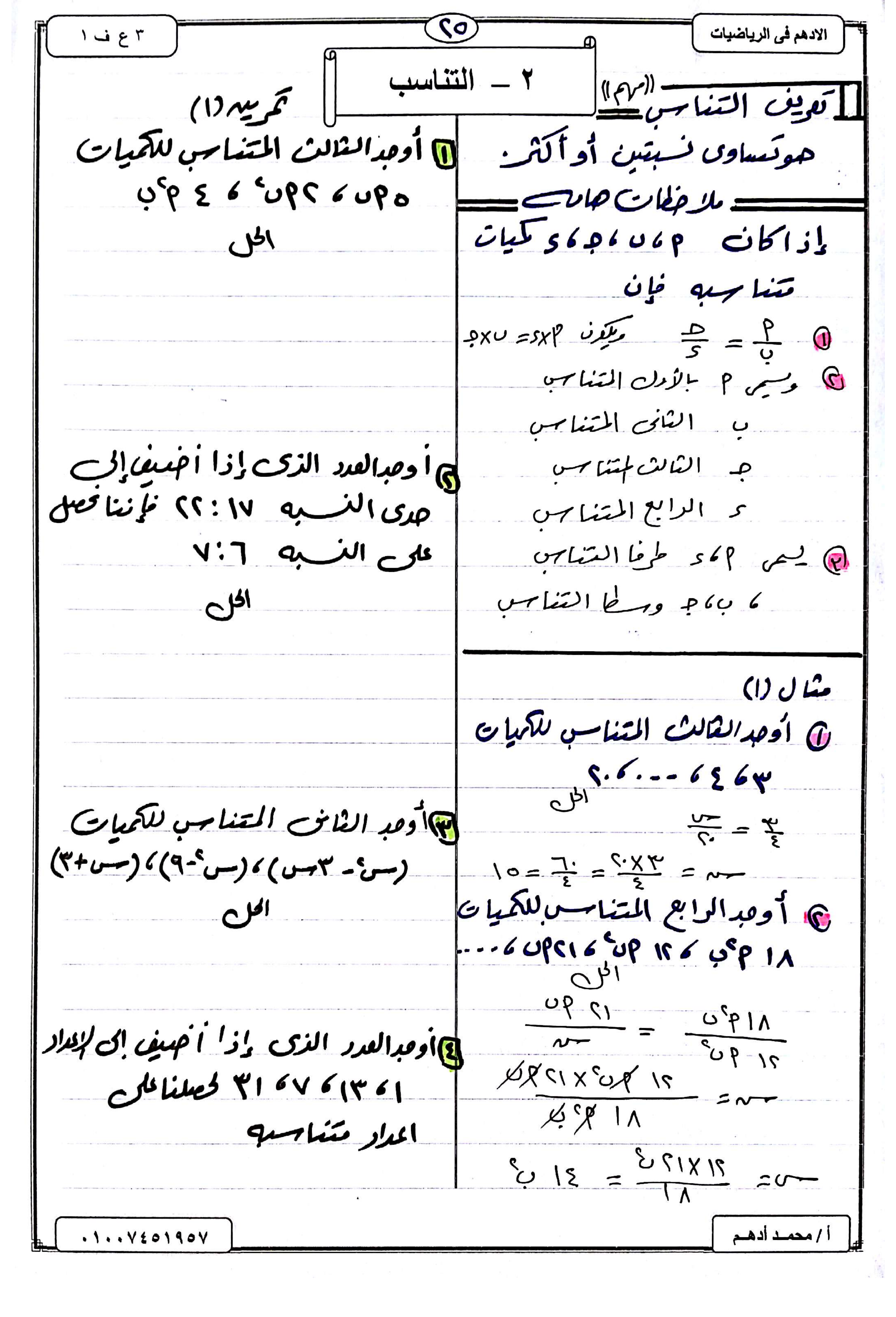
العدد الأكبر = ٤ × ١٢ = ٤٨

تمرين (١)

أوجد العدد الذى إذا أضيف مربعه إلى كل من حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٤ : ٥

تمرين (٢)

ما العدد الموجب الذى إذا طرح من مقدم النسبة ١٣ : ١٠ وأضيف مربعه إلى تاليها فإن النسبة = المعكوس الجمعى للعدد ٥



٢ - التناسب

تعريف التناسب (مهم)

هو تساوى نسبتين أو أكثر

ملاحظات هامة

إذا كان أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فإن

(١) $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ ويكون أ × د = ب × جـ

(٢) ويسمى أ بالأول المتناسب

ب الثانى المتناسب

جـ الثالث المتناسب

د الرابع المتناسب

(٣) يسمى أ ، د طرفا التناسب ، ب ، جـ وسطا التناسب

مثال (١)

(١) أوجد الثالث المتناسب للكميات ٣ ، ٤ ، ... ، ٢٠

الحل

$\frac{٣}{٤} = \frac{س}{٢٠}$

$س = \frac{٣ \times ٢٠}{٤} = \frac{٦٠}{٤} = ١٥$

(٢) أوجد الرابع المتناسب للكميات ١٨ أ^٢ب ، ١٢ أب^٢ ، ٢١ أب ، ...

الحل

$\frac{١٨ أ^٢ ب}{١٢ أ ب^٢} = \frac{٢١ أ ب}{س}$

$س = \frac{١٢ أ ب^٢ \times ٢١ أ ب}{١٨ أ^٢ ب}$

$س = \frac{١٢ \times ٢١}{١٨} = ١٤ ب^٢$

تمرين (١)

(١) أوجد الثالث المتناسب للكميات ٥أب ، ٢أب^٢ ، ٤أ^٢ب

الحل

(٢) أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى حدى النسبة ١٧ : ٢٢ فإننا نحصل على النسبة ٦ : ٧

الحل

(٣) أوجد الثالث المتناسب للكميات (س^٢ - ٣س) ، (س^٢ - ٩) ، (س + ٣)

الحل

(٤) أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى الاعداد ١ ، ٣ ، ٧ ، ١٣ لحصلنا على اعداد متناسبة

خواص التناسب

خاصيه (١) الضرب التبادلي

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن

$أ \times د = ب \times جـ$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

خاصيه (٢)

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$

فإن $أ = م \times جـ$ ، $ب = م \times د$

حيث $م \in ح^*$

أي أن مقدم = ثابت × مقدم

وتالي = ثابت × تالي

فمثلاً $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٣}$ فإن $أ = ٢م$ ، $ب = ٣م$

مثال (١)

إذا كان س : ص = ٢ : ٣

فأوجد النسبه (٣س + ٢ص) : (٢س + ص)

الحل

$\because \frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$

$\therefore س = ٢م$ ، $ص = ٣م$

$\therefore \frac{٣س + ٢ص}{٢س + ص} = \frac{٣ \times ٢م + ٢ \times ٣م}{٢ \times ٢م + ٣م}$

$= \frac{٦م + ٦م}{٤م + ٣م} = \frac{١٢م}{٧م} = \frac{١٢}{٧}$

مثال (٢)

إذا كان أ : ب = ١ : ٢

، س : ص = ٣ : ٥

فأوجد النسبه (٢أس + ب ص) : (٥ب س - ٢أص)

الحل

$\because \frac{أ}{ب} = \frac{١}{٢}$ $\therefore أ = ك$ ، $ب = ٢ك$

، $\because \frac{س}{ص} = \frac{٣}{٥}$ $\therefore س = ٣م$ ، $ص = ٥م$

$\therefore \frac{٢أس + ب ص}{٥ب س - ٢أص} = \frac{٢ \times ك \times ٣م + ٢ك \times ٥م}{٥ \times ٢ك \times ٣م - ٢ \times ك \times ٥م}$

$= \frac{٦كم + ١٠كم}{٣٠كم - ١٠كم} = \frac{١٦كم}{٢٠كم} = \frac{٤}{٥}$

مثال (٣) إذا كان

أ : ب = ٢ : ٣ ، ب : جـ = ٢ : ٥

وكان ٣أ + ب - د = ٩ فأوجد قيمة كلاً من أ ، ب ، د

الحل

أ : ب : جـ



بالضرب × ٢

بالضرب × ٣

فيكون أ : ب : د

٤ : ٦

٦ : ١٥

$\therefore$ أ : ب : د = ٤ : ٦ : ١٥

$\therefore أ = ٤م$ ، $ب = ٦م$ ، $د = ١٥م$

، $\because ٣أ + ب - د = ٩$

$١٢م + ٦م - ١٥م = ٩$ $٣م = ٩$

$\therefore م = ٣$ فيكون $أ = ١٢$ ، $ب = ١٨$ ، $د = ٤٥$

تمرين (١)

إذا كان أ/ب = ٢/٣ ، س/ص = ٣/٥

فاثبت أن (٧ أ س - ٤ ب ص) ، (١١ أ ص + ب س) ، ١٢ ، ١٤ كميات متناسبة

الحل

خاصية (٣)

إذا كان أ/ب = جـ/د فإن

أ/جـ = ب/د أي أن مقدم ١ / مقدم ٢ = تالي ١ / تالي ٢

فمثلاً إذا كان أ/٧ = ب/٢١

فإن أ/ب = ٧/٢١ = ١/٣

إذا كان ٥أ ، ٢ص ، ٣ب ، ٧ص كميات متناسبة فإن

٥أ/٢ص = ٣ب/٧ص

٥أ/٣ب = ٢ص/٧ص ، ٥أ/٣ب = ٢/٧

أ/ب = ٢/٧ × ٣/٥ = ٦/٣٥

خاصية (٤)

إذا كان أ × د = ب × جـ فإن

أ/ب = جـ/د

فمثلاً إذا كان

٣س = ٥ص فإن س/ص = ٥/٣

٧أ = ٢ب فإن أ/ب = ٢/٧

مثال (١) أوجد س/ص لكل مما يأتي

(١) ١٢س = ٣ص

س/ص = ٣/١٢ = ١/٤

(٢) ½ س = ¾ ص

س/ص = ¾ ÷ ½ = ¾ × ٢/١ = ٣/٢

(٣) ٣أ - ٧ب = ٠

٣أ = ٧ب ، أ/ب = ٧/٣

مثال (٢) إذا كان

٤س - ٣ص : ٢س + ص = ٤ : ٧

فأوجد في أبسط صورة س : ص

الحل

(٤س - ٣ص)/(٢س + ص) = ٤/٧

٧(٤س - ٣ص) = ٤(٢س + ص)

٢٨س - ٢١ص = ٨س + ٤ص

$٢٨ س - ٨ س = ٤ ص + ٢١ ص$

$٢٠ س = ٢٥ ص$

$\frac{س}{ص} = \frac{٢٥}{٢٠} = \frac{٥}{٤}$

تمرين إذا كان

$٢ س^٢ - ٦ ص^٢ = س ص$

فأوجد س : ص

الحل

عددان صحيحان النسبة بينهما ٢:٥ فإذا طرح من الأول ٢ وأضيف للثانى ١ صارت النسبة ١:٤ أوجد العددين

الحل

الواجب

1. أوجد العدد الذى إذا أضيف الى حدى النسبة ٧:١١ فإنها تصبح ٢:٣
2. أوجد العدد الذى إذا طرح ثلاثة أمثاله من حدى النسبة $\frac{٤٩}{٦٩}$ فإنها تصبح ٢:٣
3. أوجد العدد الذى إذا أضيف مربعه إلى كل من حدى النسبة ٧:١١ فإنها تصبح ٤:٥
4. عددان صحيحان النسبة بينهما ٣:٧ إذا طرح من كل منهما ٥ اصبحت النسبة ١:٣ أوجد العددين
5. عددان صحيحان النسبة بينهما ٢:٣ وإذا أضيف للأول ٧ وطرح من الثانى ١٢ صارت النسبة ٥:٣ أوجد العددين
6. أوجد الأول المتناسب
   (٥ ، ٩ ، ١٠) ، (٤ ، ٥ ، ٢٠)
7. أوجد الثانى المتناسب
   $٥ ل^٣ م$ ، $١٥ ل^٢ م$ ، $٦ م^٢$
8. أوجد الثالث المتناسب
   ٣ ، ٢٠ ، ٢
   $١ ، \sqrt{٨} ، ١٤ \sqrt{٢}$
   $(أ^٢ + أ)$ ، $(٢أ^٢ + ٢أ)$ ، ٦
9. أوجد الرابع المتناسب
   $٢أب$ ، $أ^٢$ ، $٤ أ^٢ ب$

١٠ اوجد العدد الذى إذا أضيف للكميات الاتية فإنها تصبح متناسبة
١٥ ، ٢٠ ، ١١ ، ١٤

١١ العدد الذى إذا طرح من الكميات الاتية فإنها تصبح متناسبة؟
٣ ، ١٠ ، ٢ ، ٨

١٢ إذا كانت $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$

فأوجد قيمة

① $\frac{٣س + ٢ص}{٥س - ص}$ ② $\frac{س^٢ + ٢ص^٢}{ص^٢ - س^٢}$

١٣ إذا كان $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٥}$

فأوجد قيمة $(٧س + ٩ص) : (٤س + ٢ص)$

١٤ إذا كان س : ص = ١ : ٢
، ع : ل = ٧ : ٢
فأوجد قيمة $\frac{٢س ع + ص ل}{ص ع - ٣س ل}$

١٥ إذا كان أ : ب = ٣ : ٧
، أ : جـ = ٢ : ٥
وكان ب + جـ − ٣أ = ٣٣
فأوجد قيمة أ ، ب ، جـ

١٦ إذا كان س : ص : ع = ١ : ٢ : ٥
وكان س + ٢ص + ٣ع = ٨٠
فأوجد قيمة س ، ص ، ع

١٧ إذا كان ٣س ، ٢ص ، ٦ع ، ٩ص كميات متناسبة فأوجد $\frac{س}{ع}$

١٨ إذا كان ٢أ = ٣ب = ٤جـ
وكان ٢ب + جـ − أ = ٧,٥
فأوجد أ ، ب ، جـ

أكمل العبارات الاتية

① ٣س + ٢ص = ٠
فإن $\left(\frac{ص}{س}\right)^٣ = ---$

② ٤٩س² − ١٦ص² = ٠ حيث
س ، ص ∈ ح⁺ فإن $\left(\frac{س}{ص}\right) = ---$

③ إذا كان أ : ب = ٢ : ٥
أ : جـ = ٣ : ٤ فإن ب : جـ = ---

④ $\frac{٤س^٢ - ٩ص^٢}{-------} = \frac{٢س - ٣ص}{٢س + ٣ص}$

⑤ التناسب هو -----

⑥ قسم مبلغ بين شخصين بنسبة ٢ : ٣
فإذا كان نصيب أولهما = ٣٠ جنيها
فإن نصيب الآخر ---

⑦ ٧س = ٣ص ⟸ $\frac{س}{ص} = ---$

⑧ $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣}$ فإن $\frac{٢أ}{٣ب} = ---$

$\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٣}$ بالضرب × $\frac{٢}{٣}$

$\frac{٢أ}{٣ب} = \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٩}$

تابع خواص التناسب

خاصية (٥)

إذا كان أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و ، ... كميات متناسبة فإنه كما سبق يكون:

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}} = \dots = \text{ك}$$ فرضاً

ويكون أ = ك ب ، جـ = ك د

هـ = ك و وهكذا

أي أن : مقدم = ثابت × تالي

مثال (١)

إذا كان أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فأثبت أن

(١) $$\left(\frac{\text{أ}+\text{ب}}{\text{جـ}+\text{د}}\right)^2 = \frac{2\text{أ}^2 - 3\text{ب}^2}{2\text{جـ}^2 - 3\text{د}^2}$$

الحل

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{ك}$$ فرضاً

∴ أ = ك ب ، جـ = ك د

∴ الطرف الأيمن $$= \left(\frac{\text{ك ب} + \text{ب}}{\text{ك د} + \text{د}}\right)^2 = \left(\frac{\text{ب}(\text{ك}+1)}{\text{د}(\text{ك}+1)}\right)^2 = \left(\frac{\text{ب}}{\text{د}}\right)^2 \leftarrow (1)$$

الطرف الأيسر $$= \frac{2\text{ك}^2\text{ب}^2 - 3\text{ب}^2}{2\text{ك}^2\text{د}^2 - 3\text{د}^2} = \frac{\text{ب}^2(2\text{ك}^2 - 3)}{\text{د}^2(2\text{ك}^2 - 3)} = \left(\frac{\text{ب}}{\text{د}}\right)^2 \leftarrow (2)$$

∴ الطرفان متساويان

(٢) $$\sqrt[3]{\frac{5\text{أ}^3 - 3\text{جـ}^3}{5\text{ب}^3 - 3\text{د}^3}} = \frac{\text{أ}+\text{جـ}}{\text{ب}+\text{د}}$$

الحل

الطرف الأيمن $$= \sqrt[3]{\frac{5(\text{ك ب})^3 - 3(\text{ك د})^3}{5\text{ب}^3 - 3\text{د}^3}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{5\text{ك}^3\text{ب}^3 - 3\text{ك}^3\text{د}^3}{5\text{ب}^3 - 3\text{د}^3}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{\text{ك}^3(5\text{ب}^3 - 3\text{د}^3)}{(5\text{ب}^3 - 3\text{د}^3)}}$$

$$= \sqrt[3]{\text{ك}^3} = \text{ك} \leftarrow (1)$$

الطرف الأيسر

$$= \frac{\text{ك ب} + \text{ك د}}{\text{ب} + \text{د}}$$

$$= \frac{\text{ك}(\text{ب}+\text{د})}{(\text{ب}+\text{د})} = \text{ك} \leftarrow (2)$$

من (١) ، (٢) ∴ الطرفان متساويان

تمرين

إذا كان أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و كميات متناسبة فأثبت أن

$$\sqrt{\frac{5\text{أ}^2 - 7\text{جـ هـ}}{5\text{ب}^2 - 7\text{د و}}} = \frac{2\text{أ}+\text{جـ}}{2\text{ب}+\text{د}}$$

مثال (٢)

إذا كان $\frac{أ^2 - 2ج^2}{ب^2 - 2د^2} = \frac{أ^2}{ب^2}$

اثبت أن

أ، ب، ج، د كميات متناسبة

الحل

$\because \frac{أ^2 - 2ج^2}{ب^2 - 2د^2} = \frac{أ^2}{ب^2}$

طرفين × وسطين

$ب^2(أ^2 - 2ج^2) = أ^2(ب^2 - 2د^2)$

$أ^2ب^2 - 2ب^2ج^2 = أ^2ب^2 - 2أ^2د^2$

بحذف $أ^2ب^2$ من الطرفين

$-2ب^2ج^2 = -2أ^2د^2 \quad [\div -2]$

$ب^2ج^2 = أ^2د^2$

$\because \frac{أ^2}{ب^2} = \frac{ج^2}{د^2}$ بأخذ $\sqrt{\ }$ للطرفين

$\because \frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$

$\therefore$ أ، ب، ج، د كميات متناسبة

خاصية (٦)

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{هـ}{و} = \dots = ك$

وكانت $م_1$، $م_2$، $م_3$، ... أعداد حقيقية

فإن $\frac{م_1 أ + م_2 ج + م_3 هـ}{م_1 ب + م_2 د + م_3 و} = ك$ (إحدى النسب)

أي أن $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالي}} = \text{إحدى النسب}$

مثال (٣)

إذا كان $\frac{أ}{4س + ص} = \frac{ب}{س - 4ص}$

اثبت أن $\frac{أ + ب}{5س - 3ص} = \frac{أ - ب}{3س + 5ص}$

الحل

مفتاح الحل: بص لمقام (بسط) النسبة المطلوب هتلاقي (بسط) واحد منهم مجموع المقامات اللي فوق والثاني هو الطرح بتاعهم

$\because \frac{أ}{4س + ص} = \frac{ب}{س - 4ص}$

بجمع مقدمات وتوالي النسبتين

$\because \frac{أ + ب}{4س + ص + س - 4ص} = \text{إحدى النسب}$

$\because \frac{أ + ب}{5س - 3ص} = \text{إحدى النسب} \leftarrow (1)$

بضرب حدي النسبة الثانية × (−١) وجمع مقدمات وتوالي النسبتين

$\frac{أ - ب}{4س + ص - س + 4ص} = \text{إحدى النسب}$

$\frac{أ - ب}{3س + 5ص} = \text{إحدى النسب} \leftarrow (2)$

من (١)، (٢) $\therefore \frac{أ + ب}{5س - 3ص} = \frac{أ - ب}{3س + 5ص}$

مع الأدهم انت دائماً متفوق
الرياضيات متعة الحياة

مثال (٤)

إذا كان $\frac{\text{س}}{\text{٢أ + ب}} = \frac{\text{ص}}{\text{٢ب - جـ}} = \frac{\text{ع}}{\text{٢جـ - أ}}$

فأثبت أن $\frac{\text{٢س + ص}}{\text{٤أ + ٤ب - جـ}} = \frac{\text{٢س + ٢ص + ع}}{\text{٣أ + ٦ب}}$

الحل

بص لبسط المطلوب وانت هتعرف

* بضرب حدى النسبه الاولى × (٢) والجمع مع النسبه الثانيه

$\frac{\text{٢س + ص}}{\text{٤أ + ٢ب + ٢ب - جـ}} =$ إحدى النسب

$\frac{\text{٢س + ص}}{\text{٤أ + ٤ب - جـ}} =$ إحدى النسب ← (١)

* بضرب حدى النسبه الاولى × (٢) والثانيه × (٢) وجمع مقدمات وتوالى الثلاث نسب

$\frac{\text{٢س + ٢ص + ع}}{\text{٤أ + ٢ب + ٤ب - ٢جـ + ٢جـ - أ}} =$ إحدى النسب

$= \frac{\text{٢س + ٢ص + ع}}{\text{٣أ + ٦ب}} =$ إحدى النسب (٢)

من (١)، (٢) ∴

$\frac{\text{٢س + ص}}{\text{٤أ + ٤ب - جـ}} = \frac{\text{٢س + ٢ص + ع}}{\text{٣أ + ٦ب}}$

#

مثال (٥)

إذا كان $\frac{\text{أ + ٣ب}}{\text{س + ٥ص}} = \frac{\text{٣ب + ٥جـ}}{\text{٥ص + ٧ع}} = \frac{\text{٥جـ + أ}}{\text{٧ع + س}}$

فأثبت أن $\frac{\text{أ}}{\text{٣ب}} = \frac{\text{س}}{\text{٥ص}}$

يعنى $\frac{\text{أ}}{\text{س}} = \frac{\text{٣ب}}{\text{٥ص}}$

الحل

بضرب حدى النسبه الثانيه × (-١) وجمع الثلاث نسب

∴ $\frac{\text{أ + ٣ب - ٣ب - ٥جـ + ٥جـ + أ}}{\text{س + ٥ص - ٥ص - ٧ع + ٧ع + س}} =$ إحدى النسب

$= \frac{\text{٢أ}}{\text{٢س}} = \frac{\text{أ}}{\text{س}} =$ إحدى النسب (١)

بضرب حدى النسبه الثالثه × (-١) وجمع النسب الثلاثة

∴ $\frac{\text{أ + ٣ب + ٣ب + ٥جـ - ٥جـ - أ}}{\text{س + ٥ص + ٥ص + ٧ع - ٧ع - س}} =$ إحدى النسب

$= \frac{\text{٦ب}}{\text{١٠ص}} = \frac{\text{٣ب}}{\text{٥ص}} =$ إحدى النسب (٢)

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{س}} = \frac{\text{٣ب}}{\text{٥ص}}$ ومنها $\frac{\text{أ}}{\text{٣ب}} = \frac{\text{س}}{\text{٥ص}}$

#

تمرين (١)

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{٢}} = \frac{\text{ب}}{\text{٣}} = \frac{\text{جـ}}{\text{٤}} = \frac{\text{٢أ - ب + ٥جـ}}{\text{٣س}}$

فأوجد قيمة س

الحل

الواجب

(١) إذا كان أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فأثبت أن

① $\frac{أ+ب}{ب} = \frac{جـ+د}{د}$

② $\frac{٢أ+٣جـ}{٢ب+٣د} = \frac{أ-٢جـ}{ب-٢د}$

③ $\frac{أ^{٢}-جـ^{٢}}{ب^{٢}-د^{٢}} = \frac{أجـ}{ب د}$

④ $\sqrt{\frac{٣أ^{٢}-٥جـ^{٢}}{٣ب^{٢}-٥د^{٢}}} = \frac{أ+جـ}{ب+د}$

(٢) إذا كان أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و كميات متناسبة فأثبت أن

① $\frac{أ+٥جـ}{ب+٥د} = \frac{جـ-٣هـ}{د-٣و}$

② $\sqrt{\frac{٢أ^{٢}-٣جـ هـ}{٢ب^{٢}-٣د و}} = \sqrt[٣]{\frac{أ جـ هـ}{ب د و}}$

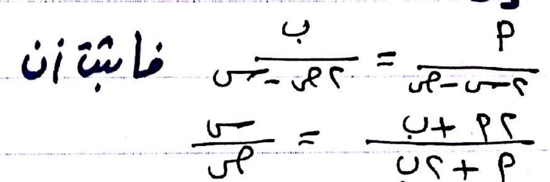
(٣) أثبت أن أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة إذا كان

① $\frac{أ}{أ-ب} = \frac{جـ}{جـ-د}$ ② $\frac{أ+ب}{أ-ب} = \frac{جـ+د}{جـ-د}$

(٤) إذا كان $\frac{س}{أ-ب+جـ} = \frac{ص}{ب-جـ+أ} = \frac{ع}{جـ-أ+ب}$

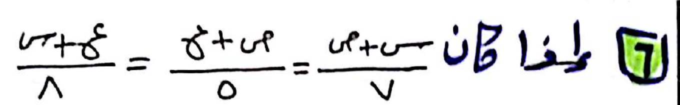
اثبت أن $\frac{س+ص}{أ} = \frac{ص+ع}{ب}$

(٥) إذا كان



$\frac{أ}{٢س-ص} = \frac{ب}{٢ص-س}$ فأثبت أن $\frac{٢أ+ب}{أ+٢ب} = \frac{س}{ص}$

(٦) إذا كان



$\frac{س+ص}{٧} = \frac{ص+ع}{٥} = \frac{ع+س}{٨}$

اثبت أن $\frac{س+ص+ع}{س-ع} = ٥$

(٧) إذا كان $\frac{أ+ب}{٣} = \frac{ب+جـ}{٦} = \frac{جـ+أ}{٥}$ فأثبت أن $\frac{أ+ب+جـ}{أ} = ٧$

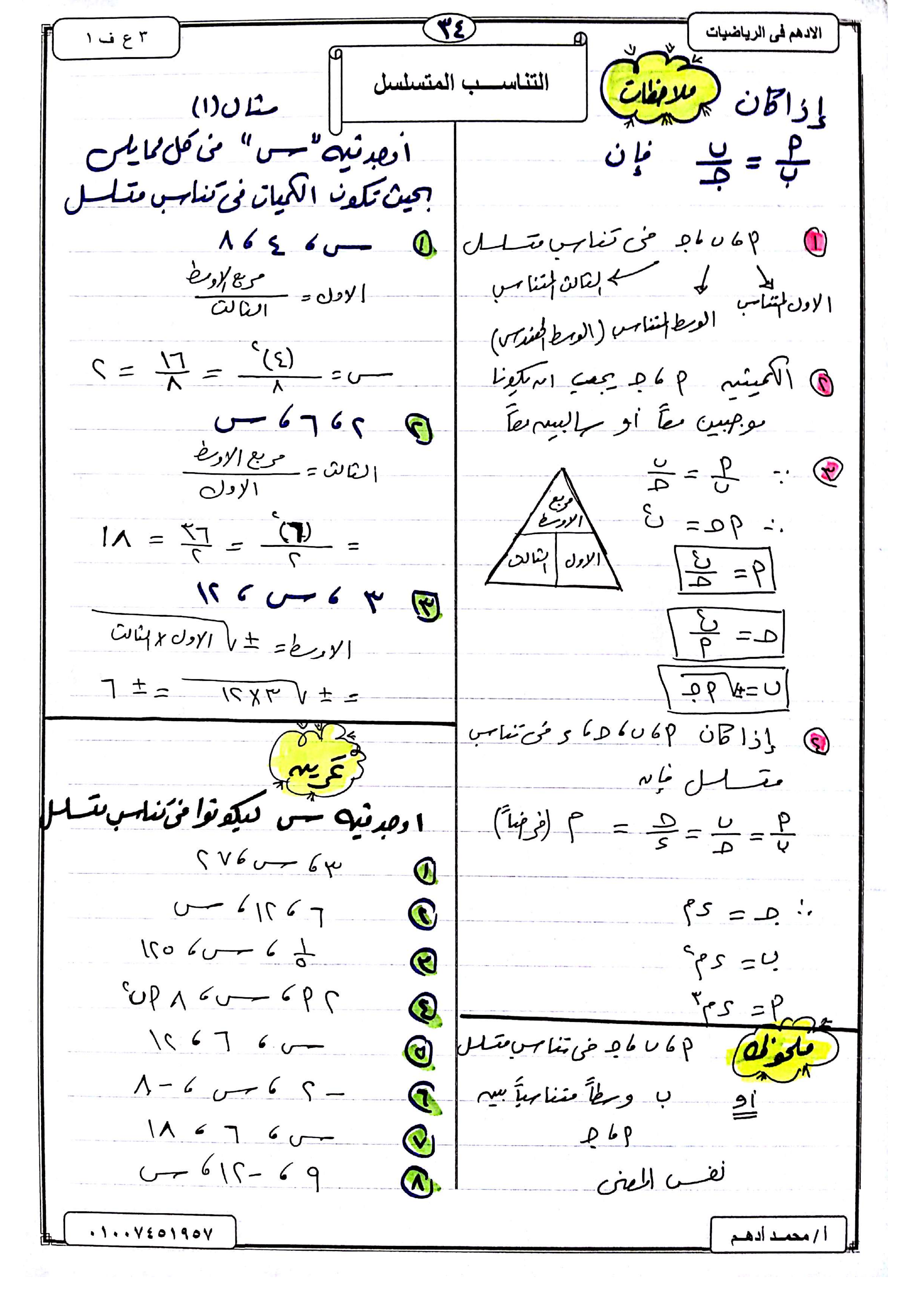
أكمل العبارات الآتية

① إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{٣}{٧}$ فإن $\frac{أ+جـ}{ب+د} =$ ---

② $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{هـ}{و} = \frac{١}{٣}$ فإن $\frac{أ-٥جـ+هـ}{ب-٥د+و} =$ ---

③ $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{هـ}{و} = \frac{٢أ+....-٣هـ}{....+٤د-....}$

④ $\frac{س}{٢} = ص = \frac{ع}{٦} = \frac{س+ص+ع}{----} = \frac{ع-ص-س}{----}$



التناسب المتسلسل

ملاحظات

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$ فإن

١) أ ، ب ، جـ في تناسب متسلسل

- أ : الأول المتناسب
- ب : الوسط المتناسب (الوسط الهندسي)
- جـ : الثالث المتناسب

٢) الكميتين أ ، جـ يجب أن يكونا موجبين معاً أو سالبين معاً

٣) ∵ $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$ ∴ أ جـ = ب²

$$أ = \frac{ب^2}{جـ}$$

$$جـ = \frac{ب^2}{أ}$$

$$ب = \pm\sqrt{أ\,جـ}$$

٤) إذا كان أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل فإنه

$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$ (مثلاً)

∴ جـ = د م

ب = د م²

أ = د م³

ملحوظة

أ ، ب ، جـ في تناسب متسلسل

أو

ب وسطاً متناسباً بين أ ، جـ

نفس المعنى

مثال (١)

أوجد قيمة "س" في كل مما يلي بحيث تكون الكميات في تناسب متسلسل

١) س ، ٤ ، ٨

الأول = $\frac{\text{مربع الأوسط}}{\text{الثالث}}$

س = $\frac{(٤)^2}{٨} = \frac{١٦}{٨} = ٢$

٢) ٢ ، ٦ ، س

الثالث = $\frac{\text{مربع الأوسط}}{\text{الأول}}$

= $\frac{(٦)^2}{٢} = \frac{٣٦}{٢} = ١٨$

٣) ٣ ، س ، ١٢

الأوسط = $\pm\sqrt{\text{الأول} \times \text{الثالث}}$

= $\pm\sqrt{٣ \times ١٢} = \pm ٦$

تمرين

أوجد قيمة س لتكونوا في تناسب متسلسل

١) ٣ ، س ، ٢٧
٢) ٦ ، ١٢ ، س
٣) $\frac{١}{٥}$ ، س ، ١٢٥
٤) ٢أ ، س ، ٨ أ ب²
٥) س ، ٦ ، ١٢
٦) −٢ ، س ، −٨
٧) س ، ٦ ، ١٨
٨) ٩ ، −١٢ ، س

مثال (٢)

إذا كان أ ، ب ، جـ فى تناسب متسلسل فاثبت أن

(١) $\frac{\text{أ}^2+\text{ب}^2}{\text{ب}^2+\text{جـ}^2} = \frac{\text{أ}}{\text{جـ}}$

الحل

∵ أ ، ب ، جـ فى تناسب متسلسل

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \text{م}$

∴ $\text{ب} = \text{جـ}\,\text{م}$ ، $\text{أ} = \text{جـ}\,\text{م}^2$

* الطرف الايمن $= \frac{(\text{جـ}\,\text{م}^2)^2 + (\text{جـ}\,\text{م})^2}{(\text{جـ}\,\text{م})^2 + \text{جـ}^2}$

$= \frac{\text{جـ}^2\text{م}^4 + \text{جـ}^2\text{م}^2}{\text{جـ}^2\text{م}^2 + \text{جـ}^2} = \frac{\text{جـ}^2\text{م}^2(\text{م}^2+1)}{\text{جـ}^2(\text{م}^2+1)}$

$= \text{م}^2$ ⟸ (١)

* الطرف الايسر $= \frac{\text{جـ}\,\text{م}^2}{\text{جـ}} = \text{م}^2$

∴ الطرفان متساويان

(٢) $\frac{\text{أ}^2+\text{أ}\text{ب}+\text{ب}^2}{\text{ب}^2+\text{ب}\text{جـ}+\text{جـ}^2} = \frac{\text{أ}^2-\text{ب}^2}{\text{ب}^2-\text{جـ}^2}$

الحل

مثال (٣)

إذا كان أ ، ب ، جـ ، د فى تناسب متسلسل فاثبت أن

$\frac{\text{أ} - \text{د}}{\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}} = \frac{\text{أ} - ٢\text{ب} + \text{جـ}}{\text{أ} - \text{ب}}$

الحل

∵ أ ، ب ، جـ ، د فى تناسب متسلسل

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$ (فرضاً)

∴ $\text{جـ} = \text{د}\,\text{م}$ ، $\text{ب} = \text{د}\,\text{م}^2$ ، $\text{أ} = \text{د}\,\text{م}^3$

الطرف الايمن $= \frac{\text{د}\,\text{م}^3 - \text{د}}{\text{د}\,\text{م}^3 + \text{د}\,\text{م}^2 + \text{د}\,\text{م}}$

$= \frac{\text{د}(\text{م}^3-1)}{\text{د}\,\text{م}(\text{م}^2+\text{م}+1)} = \frac{\text{د}(\text{م}-1)(\text{م}^2+\text{م}+1)}{\text{د}\,\text{م}(\text{م}^2+\text{م}+1)}$

$= \frac{\text{م}-1}{\text{م}}$ ⟸ (١)

الطرف الايسر $= \frac{\text{د}\,\text{م}^3 - ٢\text{د}\,\text{م}^2 + \text{د}\,\text{م}}{\text{د}\,\text{م}^3 - \text{د}\,\text{م}^2}$

$= \frac{\text{د}\,\text{م}(\text{م}^2 - ٢\text{م} + 1)}{\text{د}\,\text{م}^2(\text{م}-1)} = \frac{\text{د}\,\text{م}(\text{م}-1)^2}{\text{د}\,\text{م}^2(\text{م}-1)}$

$= \frac{\text{م}-1}{\text{م}}$ ⟸ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الطرفان متساويان

مثال (٤)

إذا كان ب وسطاً متناسباً بين أ ، جـ وكانت جـ وسطاً متناسباً بين ب ، م فأثبت أن

$$\frac{أ^2}{ب^2}+\frac{ب^2}{جـ^2}+\frac{جـ^2}{م^2}=\frac{أ}{جـ}+\frac{ب}{م}+\frac{أجـ}{بم}$$

الحل

$\frac{أ}{ب}=\frac{ب}{جـ}=\frac{جـ}{م}=$ ك فرضاً

جـ $=$ م ك ، ب $=$ م ك^2 ، أ $=$ م ك^3

الطرف الأيمن =

الطرف الأيسر =

الواجب

① أوجد الأول المتناسب لكل من

① ٤ ، ٨ ② أ ر ، أ ر^2

② أوجد الثالث المتناسب لكل من

① ٦ ، ١٢ ② س^2 ، −٣ س^3

③ أوجد الوسط المتناسب لكل من

① ٣ ، ٢٧ ② ١ ، ٩

③ ٨ س^2 ، ٢ ص^4 ④ −٢ ، −١٨

⑤ ٢ ، ٥٠ ⑥ −٤ ، −٩

④ إذا كان ب وسطاً متناسباً بين أ ، جـ (أ ، ب ، جـ) في تناسب متسلسل فأثبت أن

① $\frac{أ-ب}{ب-جـ}=\frac{أ+3ب}{ب+3جـ}$

② $\left(\frac{ب-جـ}{أ-ب}\right)^2=\frac{جـ}{أ}$

③ $\frac{أ^3-4ب^3}{ب^3-4جـ^3}=\frac{ب^3}{جـ^3}$

④ $\frac{2جـ^2-3ب^2}{2ب^2-3أ^2}=\frac{جـ}{أ}=\frac{جـ^2}{ب^2}$

⑤ إذا كان أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل فأثبت أن

① $\frac{أ-2ب}{ب-2جـ}=\frac{3ب+4جـ}{3جـ+4د}$

② $\left(\frac{أ+ب}{ب+جـ}\right)^2=\frac{أ}{2جـ}+\frac{ب}{2د}$

③ $\frac{أب-جـد}{ب^2-جـ^2}=\frac{أ+جـ}{ب}$

④ $\frac{2أ^3+3ب^3}{3أ^3-4ب^3}=\frac{2أ+3د}{3أ-4د}$

⑥ إذا كان س ، ٣ ، ٩ ، ص في تناسب متسلسل فأوجد قيمة س ، ص

⑦ إذا كان ٢ ، س + ٤ ، ١٨ كميات متناسبة فأوجد قيمة س

⑧ أوجد العدد الذي إذا أضيف إلى كل من الأعداد ١ ، ٥ ، ١٣ فإنها تصبح متناسبة

٣ ـ التغير الطردى

شوية ملاحظات زى الفل

١ـ يقال أن ص تتغير طردياً مع س ونكتب ص ∝ س إذا كان

أو

ص = م س
$\frac{ص}{س}$ = م

⟸ (ص = ثابت × س)

($\frac{ص}{س}$ = ثابت)

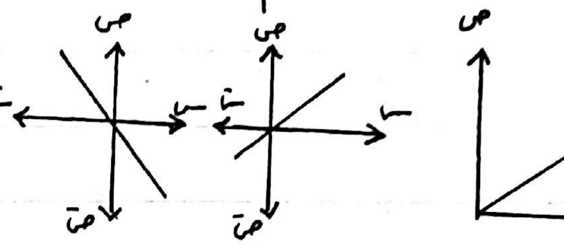
حيث م (ثابت حقيقي لا يساوى الصفر)

٢ـ فى حالة التغير الطردى بين كميتين يكون

$\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_1}{س_2}$ والعكس صحيح

٣ـ التمثيل البيانى للعلاقة الطردية

عبارة عن خط مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠، ٠)



لذلك (أى مستقيم لا يمر بنقطة الأصل لا يمثل تغير طردى)

مثال (١)

إذا كان ص ∝ س وكانت ص = ١٥ عندما س = ٣

أوجد

① العلاقة بين س ، ص

الحل

∵ ص ∝ س ∴ ص = م س

، ص = ١٥ عندما س = ٣

١٥ = م × ٣ ∴ م = $\frac{١٥}{٣}$ = ٥

∴ العلاقة هى | ص = ٥ س |

② أوجد قيمة ص عندما س = ٧

ص = ٥ س

ص = ٥ × ٧ = ٣٥

③ قيمة س عندما ص = ٩٠

ص = ٥ س

٩٠ = ٥ س

س = $\frac{٩٠}{٥}$ = ١٨

تمرين (١)

إذا كان ص ∝ س وكانت ص = ١٢ عندما س = ٣ فأوجد

① العلاقة بين س ، ص

② قيمة ص عندما س = ٩

③ قيمة س عندما ص = ٦

مثال (٢)

إذا كان ص ∝ ∛س وكانت ص = ٢/٣ عندما س = ٨ أوجد قيمة س عندما ص = ١

الحل

∵ ص ∝ ∛س

∴ ص١ / ص٢ = ∛س١ / ∛س٢

ص١ = ٢/٣ ، س١ = ٨

ص٢ = ١ ، س٢ = ؟؟

∴ (٢/٣) / ١ = ∛٨ / ∛س٢

∴ ٢/٣ = ٢ / ∛س٢

٢ ∛س٢ = ٦

∛س٢ = ٣ بتكعيب الطرفين

∴ س٢ = (٣)^٣ = ٢٧

تمرين (٢)

إذا كان ص ∝ √س وكانت ص = ١٠ عندما س = ٤ أوجد

(١) العلاقة بين س ، ص

(٢) قيمة ص عندما س = ٣٦

(٣) قيمة س عندما ص = ١٠

مثال (٣)

إذا كان (٢١س - ص) / (٧س - ع) = ص / ع أثبت أن ص ∝ ع

الحل

∵ (٢١س - ص) / (٧س - ع) = ص / ع

∴ ص (٧س - ع) = ع (٢١س - ص)

٧س ص - ص ع = ٢١س ع - ص ع

∴ ٧س ص = ٢١س ع

بالقسمة على ٧س

ص = ٣ع

∴ ص / ع = ٣ (ثابت)

∴ ص ∝ ع

> لإثبات أن ص ∝ ع نثبت أن ص / ع = ثابت أو ص = ثابت × ع

تمرين (٣)

إذا كان ٤س^٢ + ٩ص^٢ = ١٢س ص فأثبت أن س ∝ ص

الحل

لاحظ ص ∝ س ∴ ص = م س

أما س ∝ ص ∴ س = م ص

٤ ـ التغير العكسى

شوية ملاحظات كويسين

(١) يقال أن ص تتغير عكسياً مع س وتكتب ص ∝ $\frac{1}{س}$.

إذا كان ص = $\frac{م}{س}$ ← $\frac{ثابت}{س}$

أو ص س = م ← ص س = ثابت ← تستخدم لإثبات التناسب العكسى

ويكون $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_2}{س_1}$

مثال (١)

إذا كانت ص تتغير عكسياً مع س وكانت ص = ٦ عندما س = ٢,٥ فأوجد العلاقة بين س ، ص ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٥

الحل

∵ ص ∝ $\frac{1}{س}$ ∴ س ص = م

∵ ص = ٦ ، عندما س = ٢,٥

∴ م = ٦ × ٢,٥ = ١٥

∴ العلاقة هى س ص = ١٥

عندما س = ٥

∴ ٥ ص = ١٥ ∴ ص = $\frac{15}{5}$ = ٣

ماهو الشئ الذى يظل حاراً حتى لو وضع فى الثلاجه ؟

تمرين (١)

إذا كان ص ∝ $\frac{1}{س}$ وكانت ص = ٤ عندما س = ٦ فأوجد

(١) العلاقة بين س ، ص
(٢) قيمة ص عندما س = ٣
(٣) قيمة س عندما ص = ٢

الحل

مثال (٢)

إذا كان ص² ∝ $\frac{1}{س^3}$ وكانت ص = $\frac{1}{3}$ عندما س = ٣ أوجد ← ص² = $\frac{م}{س^3}$

(١) العلاقة بين ص ، س

الحل

∵ ص² ∝ $\frac{1}{س^3}$ ∴ ص² س³ = م

∵ ص = $\frac{1}{3}$ ، س = ٣

∴ م = $(\frac{1}{3})^2 \times (3)^3 = \frac{1}{9} \times 27 = \frac{27}{9}$

م = $\frac{27}{9}$ = ٣

∴ العلاقة هى ص² = $\frac{3}{س^3}$

(٢) عندما $ص = \frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$

$\therefore \left(\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}\right)^{٢} = \frac{٣}{س^{٣}}$

$\frac{٨}{٩} = \frac{٣}{س^{٣}}$

$\therefore س^{٣} = \frac{٣ \times ٩}{٨} = \frac{٢٧}{٨}$

بأخذ $\sqrt[٣]{}$ $\therefore س = \frac{٣}{٢}$

تمرين (٢)

إذا كان $ص = م + ٥$

حيث $م \propto \frac{١}{س^{٢}}$

وكانت $ص = ٩$ عندما $س = \frac{١}{٢}$

أوجد (١) العلاقة بين ص ، س

(٢) قيمة س عندما $ص = ٦$

الحل

$\because م \propto \frac{١}{س^{٢}}$ $\therefore م = \frac{م}{س^{٢}}$

$\therefore ص = \frac{م}{س^{٢}} + ٥$ « أكمل »

مثال (٣)

إذا كان $س^{٤} ص^{٢} - ١٤ س^{٢} ص + ٤٩ = ٠$

فأثبت أن $ص \propto \frac{١}{س^{٢}}$

الحل

$\because س^{٤} ص^{٢} - ١٤ س^{٢} ص + ٤٩ = ٠$

$\therefore (س^{٢} ص - ٧)(س^{٢} ص - ٧) = ٠$

$\therefore س^{٢} ص - ٧ = ٠$

$\therefore س^{٢} ص = ٧$ (ثابت)

$\therefore ص \propto \frac{١}{س^{٢}}$

لإثبات أن $ص \propto \frac{١}{س^{٢}}$ نثبت أن $ص \times س^{٢} =$ ثابت

تمرين (٣)

إذا كان $س^{٦} ص^{٢} = ٣ س^{٣} ص + ٤ ص^{٢}$

اثبت أن $ص \propto س^{-٣}$ معناها $ص \propto \frac{١}{س^{٣}}$

مثال (٤)

إذا كانت $ص \propto \frac{١}{\sqrt[٣]{س}}$ وكانت

$ص = ٥$ عندما $س = ٨$

فأوجد قيمة س عندما $ص = ٢$

الحل

$\because ص \propto \frac{١}{\sqrt[٣]{س}}$

$\therefore \frac{ص_{١}}{ص_{٢}} = \frac{\sqrt[٣]{س_{٢}}}{\sqrt[٣]{س_{١}}}$

$\frac{٥}{٢} = \frac{\sqrt[٣]{س_{٢}}}{\sqrt[٣]{٨}} \Leftarrow \frac{\sqrt[٣]{س_{٢}}}{٢}$

$\frac{٥}{٢} = \frac{\sqrt[٣]{س_{٢}}}{٢}$ $\therefore \sqrt[٣]{س_{٢}} = ٥$

$\therefore س_{٢} = ١٢٥$

تمارين على التغير الطردي والعكسي

١ إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ١٤ عندما س = ٤٢ أوجد

١ العلاقة بين ص ، س

٢ قيمة ص عندما س = ٦٠

٢ إذا كانت ص ∝ $\frac{1}{س}$ وكانت ص = ٣ عندما س = ٢ فأوجد

١ العلاقة بين س ، ص

٢ قيمة ص عندما س = ١٫٥

٣ إذا كانت ص ∝ المقلوب الجبري للمقدار $\frac{1}{س^2}$ وكان ص = ٣ عندما س = ٣ فأوجد

١ العلاقة بين س ، ص

٢ قيمة ص عندما س = ٩

٤ إذا كانت ص ∝ $\frac{1}{\sqrt{س}}$ وكانت ص = ٢ عندما س = ١٦ فأوجد قيمة ص عندما س = ٣٢

٥ إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ٢٠ عندما س = ٧ فأوجد قيمة س عندما ص = ٤٠

٦ إذا كانت $ص^2$ ∝ $س^3$ أوجد العلاقة بين س ، ص إذا كانت ص = ٣ عندما س = ٢

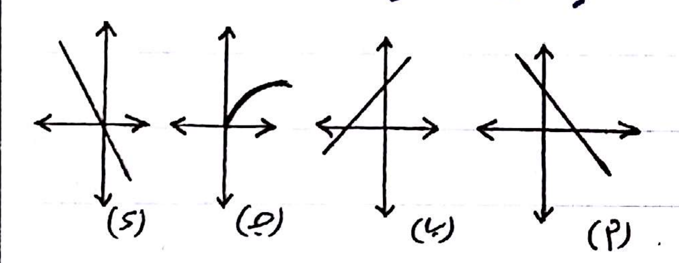
٧ إذا كان $\frac{أ + ب}{٣} = \frac{٢ب + جـ}{٦}$ فأثبت أن جـ ∝ أ

٨ $س^2 ص^2 - ٦ س ص + ٩ = ٠$ فأثبت أن ص تتغير عكسياً مع س

٩ إذا كان $\frac{٢١ س - ص}{٧ س - ع} = \frac{ص}{ع}$ فأثبت أن ص ∝ ع

١٠ إذا كان $س^4 ص^2 - ١٤ س^2 ص + ٤٩ = ٠$ فأثبت أن ص ∝ $\frac{1}{س^2}$

١١ وضح أي من الأشكال الآتية تمثل تغير طردي بين س ، ص ...



١٢ إذا كان ص ∝ س فإن $\frac{س_1}{س_2} = \frac{...}{...}$

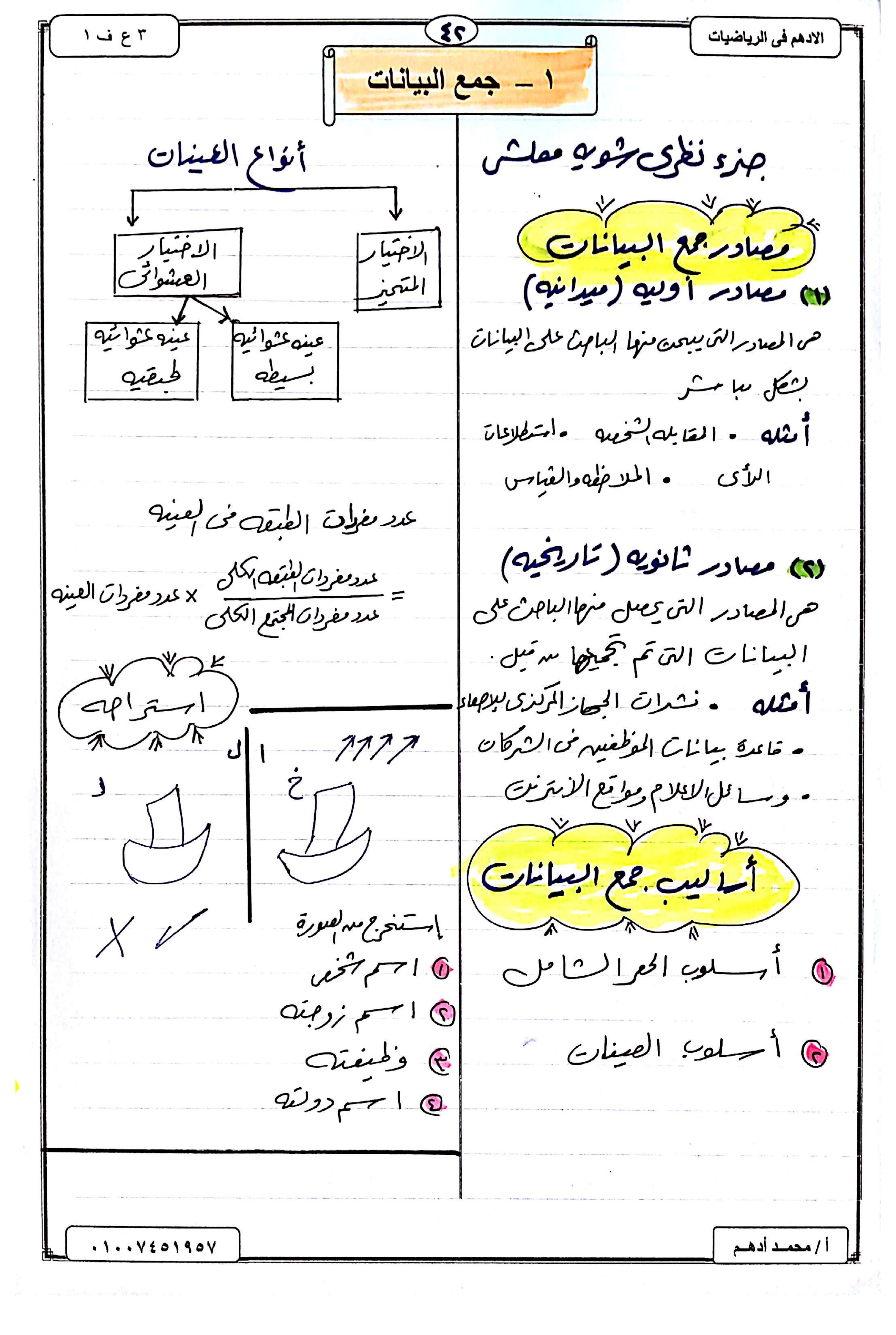
١٣ إذا كان ص ∝ $\frac{1}{س}$ فإن $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{...}{...}$

١٤ إذا كان ص = $\frac{٣}{٥}$ س فإن ص ∝ ...

١٥ إذا كان ٢ س ص = ٥ فإن س ∝ ...

١٦ إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ٢ عندما س = ٨ فإن ص = ... عندما س = ١٢

١٧ إذا كان ص ∝ $\frac{1}{س}$ وكانت ص = ٣ عندما س = ٢٠ فإن ص = ... عندما ص = ١٢ .



١ ـ جمع البيانات

جزء نظري شوية معلش

مصادر جمع البيانات

(١) مصادر أوليه (ميدانيه)

هى المصادر التى يبحث منها الباحث على البيانات بشكل مباشر

أمثله
- المقابله الشخصيه
- استطلاعات الرأى
- الملاحظه والقياس

(٢) مصادر ثانويه (تاريخيه)

هى المصادر التى يحصل منها الباحث على البيانات التى تم تجميعها من قبل.

أمثله
- نشرات الجهاز المركزى للإحصاء
- قاعدة بيانات الموظفين من الشركات
- وسائل الاعلام ومواقع الانترنت

أساليب جمع البيانات

(١) أسلوب الحصر الشامل

(٢) أسلوب العينات

أنواع العينات

- الاختيار المتحيز
- الاختيار العشوائى
  - عينه عشوائيه بسيطه
  - عينه عشوائيه طبقيه

عدد مفردات الطبقه فى العينه

$$= \frac{\text{عدد مفردات الطبقه ككل}}{\text{عدد مفردات المجتمع الكلى}} \times \text{عدد مفردات العينه}$$

استراحه

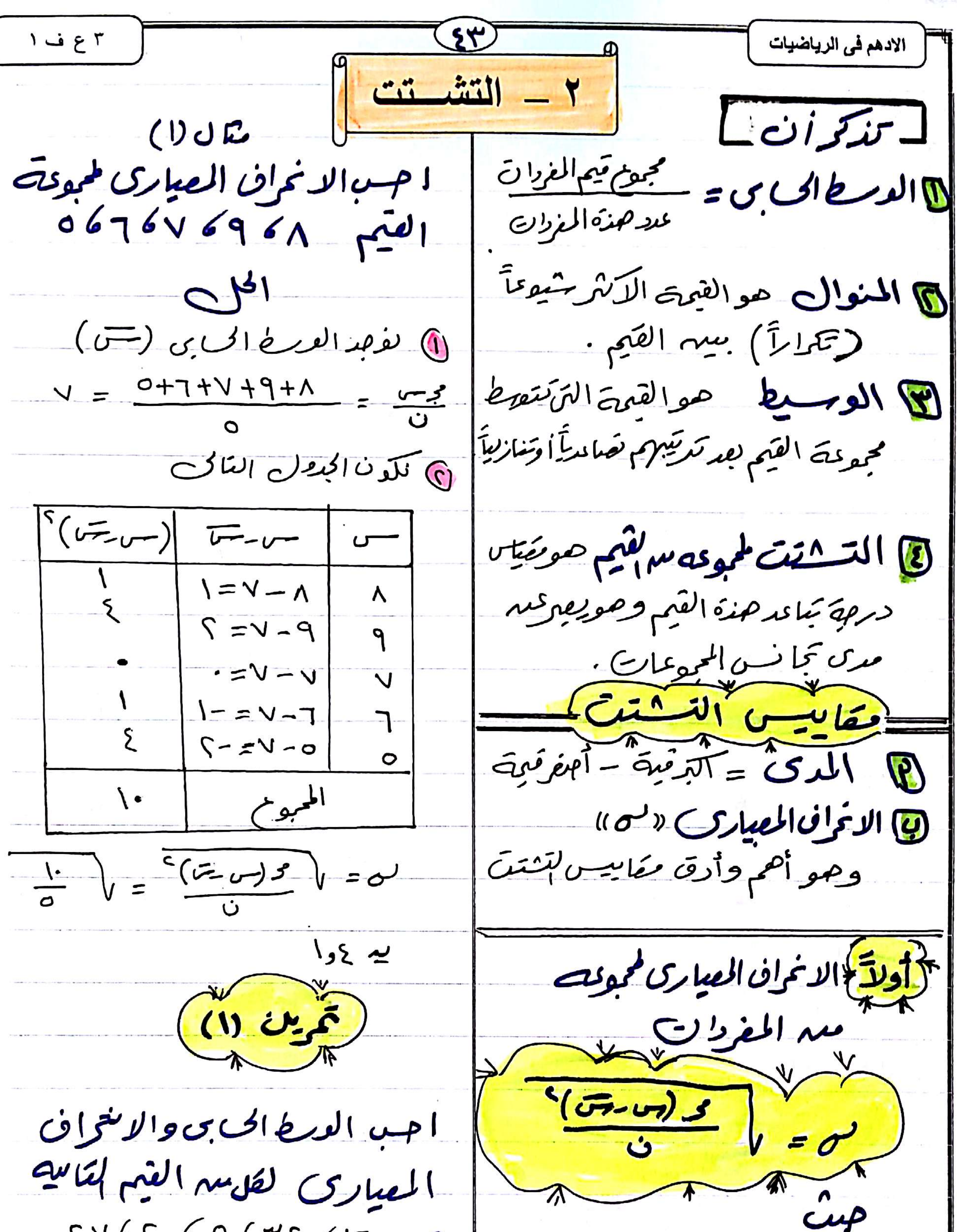
استخرج من الصورة

(١) اسم الشخص

(٢) اسم زوجته

(٣) وظيفته

(٤) اسم دولته



٢ - التشتت

تذكر أن

(١) الوسط الحسابى = $\frac{\text{مجموع قيم المفردات}}{\text{عدد جملة المفردات}}$

(٢) المنوال هو القيمة الاكثر شيوعاً (تكراراً) بين القيم.

(٣) الوسيط هو القيمة التى تتوسط مجموعة القيم بعد ترتيبهم تصاعدياً أو تنازلياً

(٤) التشتت لمجموعة من القيم هو مقياس درجة تباعد جملة القيم وهو يعبر عن مدى تجانس المجموعات.

مقاييس التشتت

(أ) المدى = أكبر قيمة - أصغر قيمة

(ب) الانحراف المعيارى «ع»
وهو أهم وأدق مقاييس التشتت

أولاً: الانحراف المعيارى لمجموعة من المفردات

$$ع = \sqrt{\frac{مج\,(س - \bar{س})^2}{ن}}$$

حيث

$\bar{س}$ (س بار) هى الوسط الحسابى للمفردات

ن عدد المفردات

مج مجموع

مثال (١)

احسب الانحراف المعيارى لمجموعة القيم ٨ ، ٩ ، ٧ ، ٦ ، ٥

الحل

(١) نوجد الوسط الحسابى ($\bar{س}$)

$$\frac{مج\,س}{ن} = \frac{٨+٩+٧+٦+٥}{٥} = ٧$$

(٢) نكون الجدول التالى

س	س - $\bar{س}$	(س - $\bar{س}$)^2
٨	٨ - ٧ = ١	١
٩	٩ - ٧ = ٢	٤
٧	٧ - ٧ = ٠	٠
٦	٦ - ٧ = -١	١
٥	٥ - ٧ = -٢	٤
المجموع		١٠

$$ع = \sqrt{\frac{مج\,(س - \bar{س})^2}{ن}} = \sqrt{\frac{١٠}{٥}}$$

≃ ١٫٤١

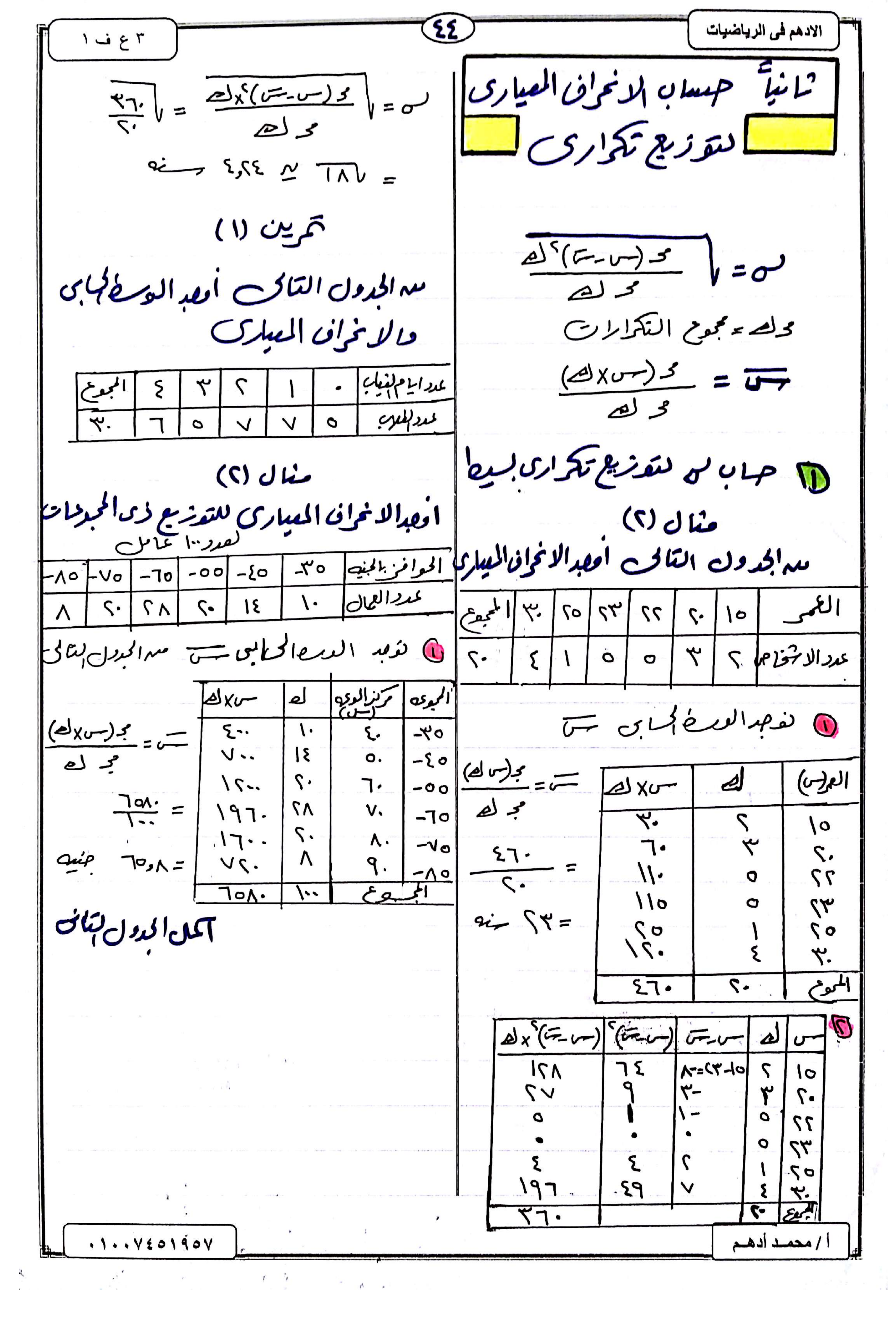
تمرين (١)

احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لكل من القيم التالية

(١) ١٦ ، ٣٢ ، ٥ ، ٢٠ ، ٢٧

(٢) ٧٢ ، ٥٣ ، ٦١ ، ٧٠ ، ٥٩

(٣) ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩



ثانياً حساب الانحراف المعيارى لتوزيع تكرارى

$$σ = \sqrt{\frac{مج (س - \bar{س})^2 ك}{مج ك}}$$

مج ك = مجموع التكرارات

$$\bar{س} = \frac{مج (س \times ك)}{مج ك}$$

(١) حساب σ لتوزيع تكرارى بسيط

مثال (٢)

من الجدول التالى أوجد الانحراف المعيارى

العمر	١٥	٢٠	٢٢	٢٣	٢٥	٣٠	المجموع
عدد الأشخاص	٢	٣	٥	٥	١	٤	٢٠

(١) نوجد الوسط الحسابى $\bar{س}$

العمر (س)	ك	س × ك
١٥	٢	٣٠
٢٠	٣	٦٠
٢٢	٥	١١٠
٢٣	٥	١١٥
٢٥	١	٢٥
٣٠	٤	١٢٠
المجموع	٢٠	٤٦٠

$$\bar{س} = \frac{مج (س ك)}{مج ك} = \frac{٤٦٠}{٢٠} = ٢٣ \text{ سنة}$$

(٢)

س	ك	س - $\bar{س}$	(س - $\bar{س}$)^2	(س - $\bar{س}$)^2 × ك
١٥	٢	١٥ - ٢٣ = -٨	٦٤	١٢٨
٢٠	٣	-٣	٩	٢٧
٢٢	٥	-١	١	٥
٢٣	٥	٠	٠	٠
٢٥	١	٢	٤	٤
٣٠	٤	٧	٤٩	١٩٦
المجموع	٢٠			٣٦٠

$$σ = \sqrt{\frac{مج (س - \bar{س})^2 \times ك}{مج ك}} = \sqrt{\frac{٣٦٠}{٢٠}}$$

$$= \sqrt{١٨} \simeq ٤٫٢٤ \text{ سنة}$$

تمرين (١)

من الجدول التالى أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى

عدد أيام الغياب	٠	١	٢	٣	٤	المجموع
عدد الطلاب	٥	٧	٧	٥	٦	٣٠

مثال (٢)

أوجد الانحراف المعيارى للتوزيع ذى المجموعات لعدد ١٠٠ عامل

الحوافز بالجنيه	٣٥-	٤٥-	٥٥-	٦٥-	٧٥-	٨٥-
عدد العمال	١٠	١٤	٢٠	٢٨	٢٠	٨

(١) نوجد الوسط الحسابى $\bar{س}$ من الجدول التالى

المجموعات	مركز المجموعة (س)	ك	س × ك
٣٥-	٤٠	١٠	٤٠٠
٤٥-	٥٠	١٤	٧٠٠
٥٥-	٦٠	٢٠	١٢٠٠
٦٥-	٧٠	٢٨	١٩٦٠
٧٥-	٨٠	٢٠	١٦٠٠
٨٥-	٩٠	٨	٧٢٠
المجموع		١٠٠	٦٥٨٠

$$\bar{س} = \frac{مج (س \times ك)}{مج ك} = \frac{٦٥٨٠}{١٠٠} = ٦٥٫٨ \text{ جنيه}$$

أكمل الجدول التالى



ملاحظات هامة

١) الانحراف المعيارى هو الأكثر تعبيراً عن مقدار تشتت المجموعة وأكثرها دقة.

٢) المدى هو أبسط مقاييس التشتت

٣) القيم الأكثر تجانساً تكون أقل تشتتاً ويكون الانحراف المعيارى لها أصغر

٤) إذا كان σ = ٠ فمعنى ذلك أن كل قيم المفردات متساوية وهى حالة التجانس التام (التشتت المنعدم)

الواجب

١ احسب الانحراف المعيارى لكل من

١) ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١

٢) ٢٢ ، ٢٠ ، ٢٠ ، ٢٠ ، ١٨

٣) ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩

٢ من كل من الجداول الاتية اوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى

١)

عدد الأطفال	٠	١	٢	٣	٤
عدد الأسر	٨	١٦	٥٠	٢٠	٦

٢)

عدد الوحدات	٠	١	٢	٣	٤	٥
عدد الصناديق	٣	١٦	١٧	٢٥	٢٠	١٩

٣)

المجموعات	٠-	٤-	٨-	١٢-	١٦-٢٠	المجموع
التكرار	٣	٤	٧	٢	٩	٢٥

٣ أكمل

١) من مقاييس التشتت ---- ، ----

٢) أبسط مقاييس التشتت هو ----

٣) أدق مقاييس التشتت هو ----

٤) الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة ----

٥) لأى مجموعة من القيم إذا تساوت جميع المفردات فإن التشتت يساوى ----

٦) إذا كان الانحراف المعيارى لمجموعة قيم = ٣ فإن مجـ (س − س̄)² لهذه القيم هو ----

٧) الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى هو ----

٨) الوسط الحسابى للقيم ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ هو ----

٩) القيمة الأكثر تكراراً لمجموعة من البيانات هو ----

١٠) المدى للمجموعة ٢٣ ، ٢٢ ، ١٥ ، ١٨ ، ١٧ هو ----

١١) $\frac{\text{مجموع قيم المفردات}}{\text{عدد هذه المفردات}}$ = ----

إنتهى المنهج مع أطيب تمنياتى القلبية بالنجاح والتفوق

م/ محمد أدهم



ثانيا

حساب المثلثات و الهندسة

الصف الثالث الإعدادى

الترم الاول

٢٠١٨

إعداد أ/ محمد أدهم
ت / ٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧

ثانياً : حساب المثلثات والهندسة

١ – النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة



(١) $1^\circ = 60'$ ، $1' = 60''$

∴ $1^\circ = 60 \times 60 = 3600''$

يستخدم المفتاح [°'''] لكتابة الزاوية بالدرجات والدقائق والثواني

(٢) مجموع قياسي الزاويتين المتتامتين $= 90^\circ$

(٣) مجموع قياسي الزاويتين المتكاملتين $= 180^\circ$

(٤) مجموع قياسات زوايا المثلث $= 180^\circ$

مثال (١)

(١) إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متتامتين ٧ : ٩ فأوجد قياسهما

الحل

نفرض أن قياسي الزاويتين ٧س ، ٩س

∴ ٧س + ٩س $= 90^\circ$

١٦س $= 90^\circ$

س $= \frac{90^\circ}{16} = 5,625^\circ$

∴ قياس الأولى $= 7 \times 5,625^\circ = 39^\circ\ 22'\ 30''$

قياس الثانية $= 9 \times 5,625^\circ = 50^\circ\ 37'\ 30''$

(٢) إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متتامتين ٢ : ٣ فأوجد قياس كل منهما

((حل انت))

مثال (٢)

إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متكاملتين ٣ : ٥ فأوجد القياس الستيني لكل منهما

الحل

نفرض أن قياسي الزاويتين ٣س ، ٥س

∴ ٣س + ٥س $= 180^\circ$

∴ ٨س $= 180^\circ$

∴ س $= \frac{180^\circ}{8} = 22,5^\circ$

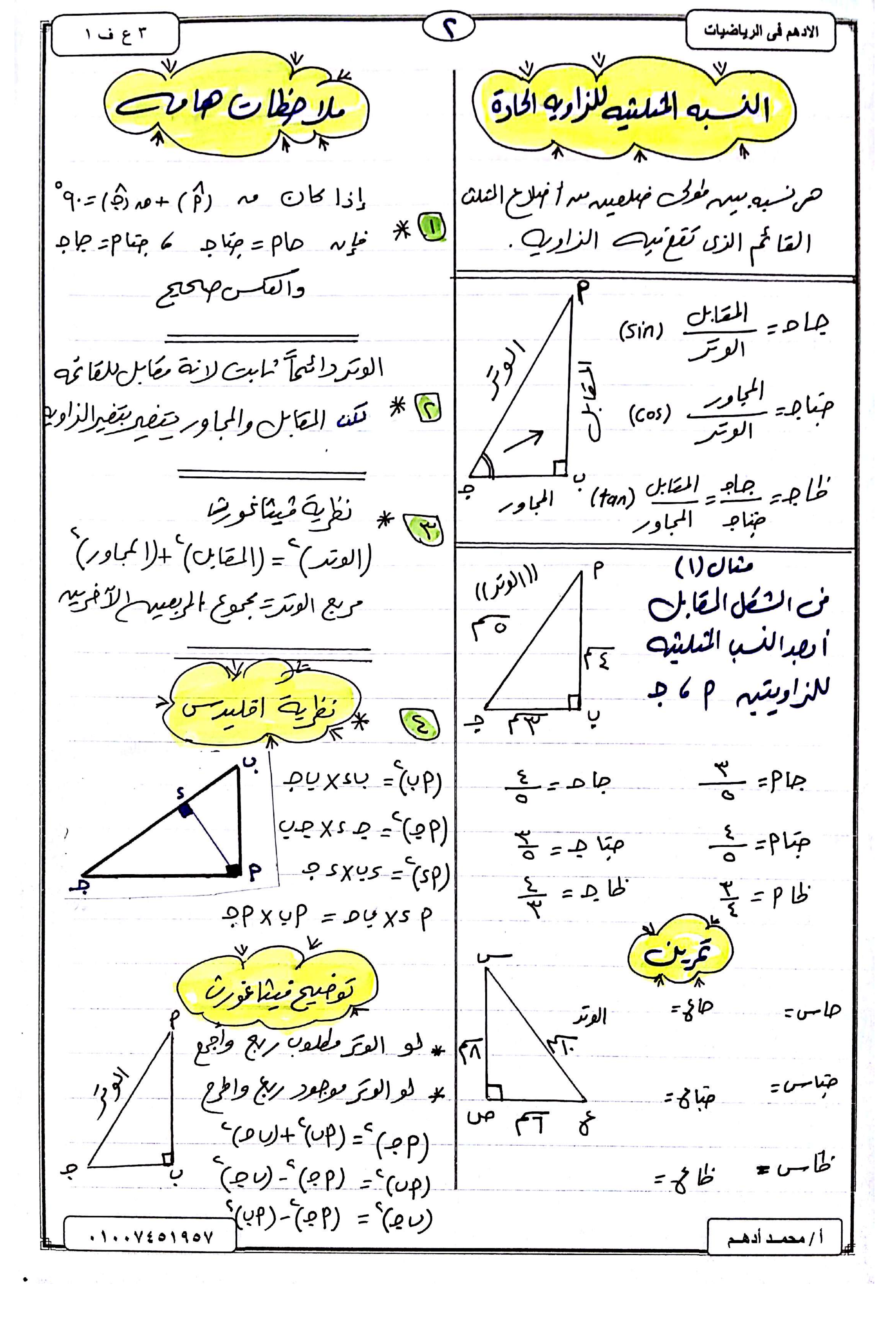
∴ قياس الأولى $= 3 \times 22,5^\circ = 67^\circ\ 30'$

قياس الثانية $= 5 \times 22,5^\circ = 112^\circ\ 30'$

تمرين (٢)

إذا كانت النسبة بين قياسات الزوايا الداخلة للمثلث ٣ : ٤ : ٧ فأوجد القياس الستيني لكل منها

الحل



النسب المثلثية للزاوية الحادة

هي نسبة بين طولي ضلعين من أضلاع المثلث القائم الذي تقع فيه الزاوية.

جا جـ = المقابل / الوتر (sin)

جتا جـ = المجاور / الوتر (cos)

ظا جـ = جا جـ / جتا جـ = المقابل / المجاور (tan)

مثال (١)

من الشكل المقابل أوجد النسب المثلثية للزاويتين أ ، جـ

جا أ = ٣/٥ ، جا جـ = ٤/٥

جتا أ = ٤/٥ ، جتا جـ = ٣/٥

ظا أ = ٣/٤ ، ظا جـ = ٤/٣

تمرين

جا س = ، جا ع =

جتا س = ، جتا ع =

ظا س = ، ظا ع =

ملاحظات هامة

١) * إذا كان ق(أ) + ق(جـ) = ٩٠° فإن جا أ = جتا جـ ، جتا أ = جا جـ والعكس صحيح

٢) * الوتر دائماً ثابت لأنه مقابل للقائمة لكن المقابل والمجاور يتغير بتغير الزاوية

٣) * نظرية فيثاغورث

(الوتر)² = (المقابل)² + (المجاور)²

مربع الوتر = مجموع المربعين الآخرين

٤) * **نظرية اقليدس**

(أب)² = ب د × ب جـ

(أجـ)² = جـ د × جـ ب

(أد)² = د ب × د جـ

أ د × ب جـ = أ ب × أ جـ

توضيح فيثاغورث

* لو الوتر مطلوب ربع واجمع
* لو الوتر موجود ربع واطرح

(أجـ)² = (أب)² + (ب جـ)²

(أب)² = (أجـ)² − (ب جـ)²

(ب جـ)² = (أجـ)² − (أب)²

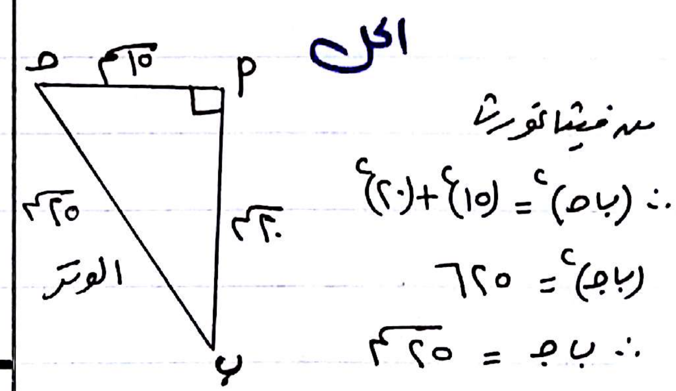
مثال (٢)

أ ب جـ مثلث فيه ق (∠أ) = ٩٠°

أ جـ = ١٥ سم ، أ ب = ٢٠ سم

اثبت أن جتا جـ جتا ب − جا جـ جا ب = صفر

الحل



من فيثاغورث

∴ (ب جـ)² = (١٥)² + (٢٠)²

(ب جـ)² = ٦٢٥

∴ ب جـ = ٢٥ سم

جا جـ = ٢٠/٢٥ ، جا ب = ١٥/٢٥

جتا جـ = ١٥/٢٥ ، جتا ب = ٢٠/٢٥

∴ جتا جـ جتا ب − جا جـ جا ب

= ١٥/٢٥ × ٢٠/٢٥ − ٢٠/٢٥ × ١٥/٢٥ = صفر

مثال (٣)

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب

فإذا كان أ ب : أ جـ = ٣ : ٥

فأوجد النسب المثلثية للزاوية أ

الحل

بفرض أن أ ب = ٣ وحدة طول

، أ جـ = ٥ وحدة طول

∴ من فيثاغورث ب جـ = ٤ وحدة طول

(الوتر ٥ ، أ ب = ٣ ، ب جـ = ٤)

جا (أ) = ، جا (جـ) =

جتا (أ) = ، جتا (جـ) =

ظا (أ) = ، ظا (جـ) =

تمرين

فى الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث قائم فى ب

أ ب = ٦ سم

، ظا جـ = ٣/٤ ← (٦/٨)

أوجد

① طول ب جـ ، أ جـ

② جا أ + جتا أ

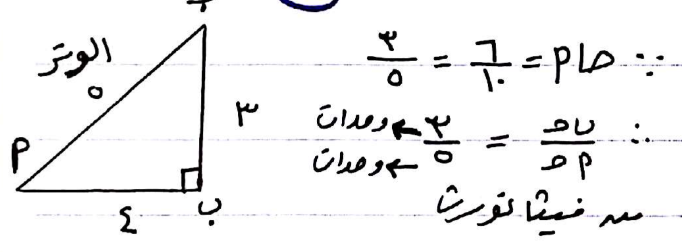
مثال (٤)

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب

، جا أ = ٠,٦

أوجد قيمة جا أ جتا جـ + جتا أ جا جـ

الحل



∵ جا أ = ٦/١٠ = ٣/٥

∴ ب جـ / أ جـ = ٣/٥ ← ٣ وحدات ، ٥ وحدات

من فيثاغورث

∴ أ ب = ٤ وحدات

∴ جا أ جتا جـ + جتا أ جا جـ

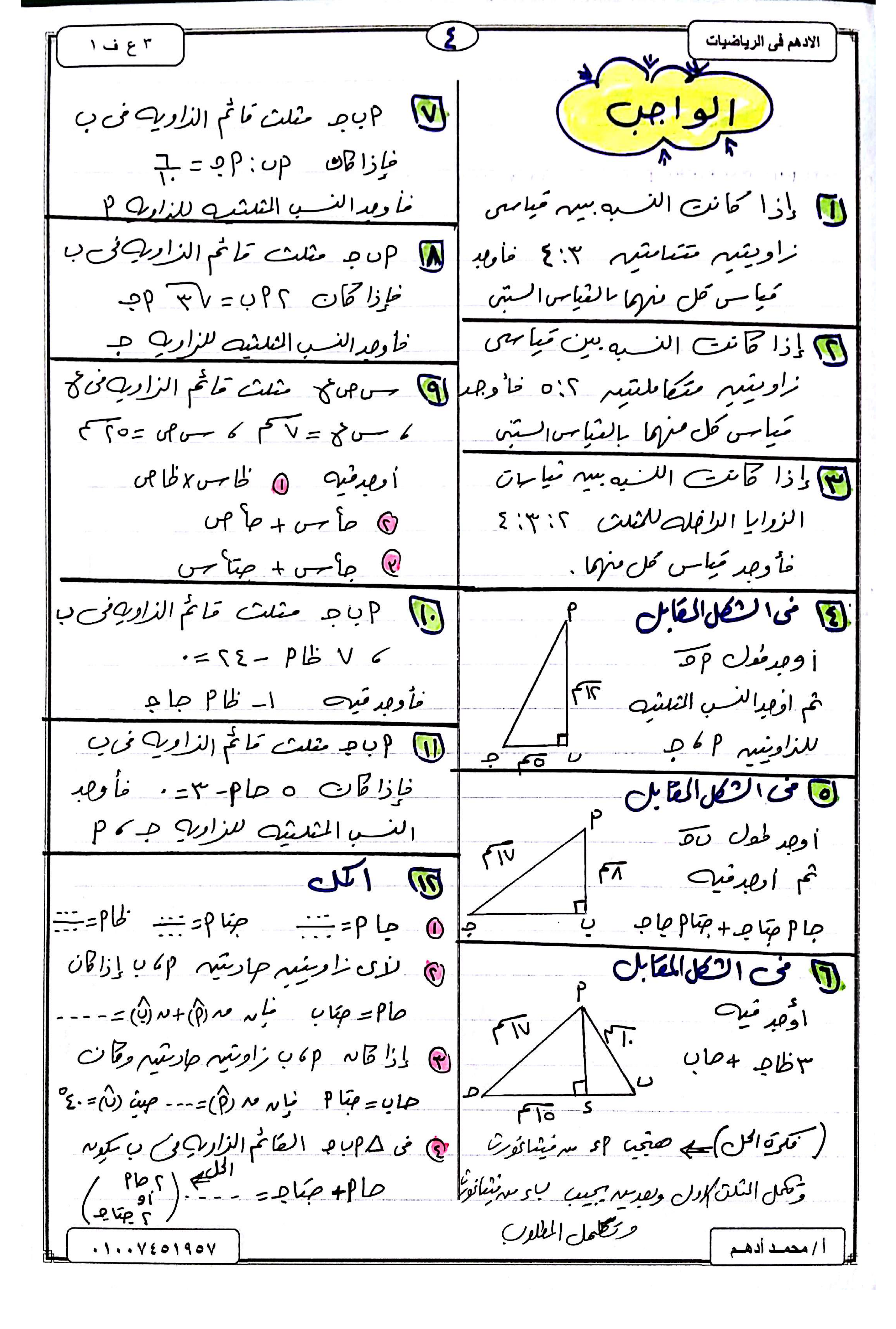
= ٣/٥ × ٣/٥ + ٤/٥ × ٤/٥ = ٩/٢٥ + ١٦/٢٥ = ١

إستراحة

قتلت قتيلة وبعد ألف يوم ظهرت آثار على الجريمة المطلوب

① اسم القاتل ② اسم القتيلة

③ مكان الجريمة ④ رقم السيارة



الواجب

١ إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متتامتين ٣ : ٤ فأوجد قياس كل منهما بالقياس الستيني

٢ إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متكاملتين ٢ : ٥ فأوجد قياس كل منهما بالقياس الستيني

٣ إذا كانت النسبة بين قياسات الزوايا الداخلة للمثلث ٢ : ٣ : ٤ فأوجد قياس كل منها.

٤ في الشكل المقابل

أوجد طول أجـ

ثم أوجد النسب المثلثية للزاويتين أ ، جـ

٥ في الشكل المقابل

أوجد طول ب جـ

ثم أوجد قيمة

جا أ جتا جـ + جتا أ جا جـ

٦ في الشكل المقابل

أوجد قيمة

٣ ظا جـ + جا ب

(فكرة الحل) ← هيجيب أد من فيثاغورث وتكمل الشكل الأول وهيجيب ب د من فيثاغورث وتكمل المطلوب

٧ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب

فإذا كان أب : أجـ = $\frac{٦}{١٠}$

فأوجد النسب المثلثية للزاوية أ

٨ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب

فإذا كان ٢ أب = √٣ أجـ

فأوجد النسب المثلثية للزاوية جـ

٩ س ص ع مثلث قائم الزاوية في ع

، س ع = ٧ سم ، س ص = ٢٥ سم

أوجد قيمة ① ظا س × ظا ص

② جا² س + جا² ص

③ جا² س + جتا² س

١٠ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب

، ٧ ظا أ − ٢٤ = ٠

فأوجد قيمة ١ − ظا أ جا جـ

١١ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب

فإذا كان ٥ جا أ − ٣ = ٠ فأوجد

النسب المثلثية للزاوية جـ ، أ

١٢ أكمل

① جا أ = ... جتا أ = ... ظا أ = ...

② لأي زاويتين حادتين أ ، ب إذا كان

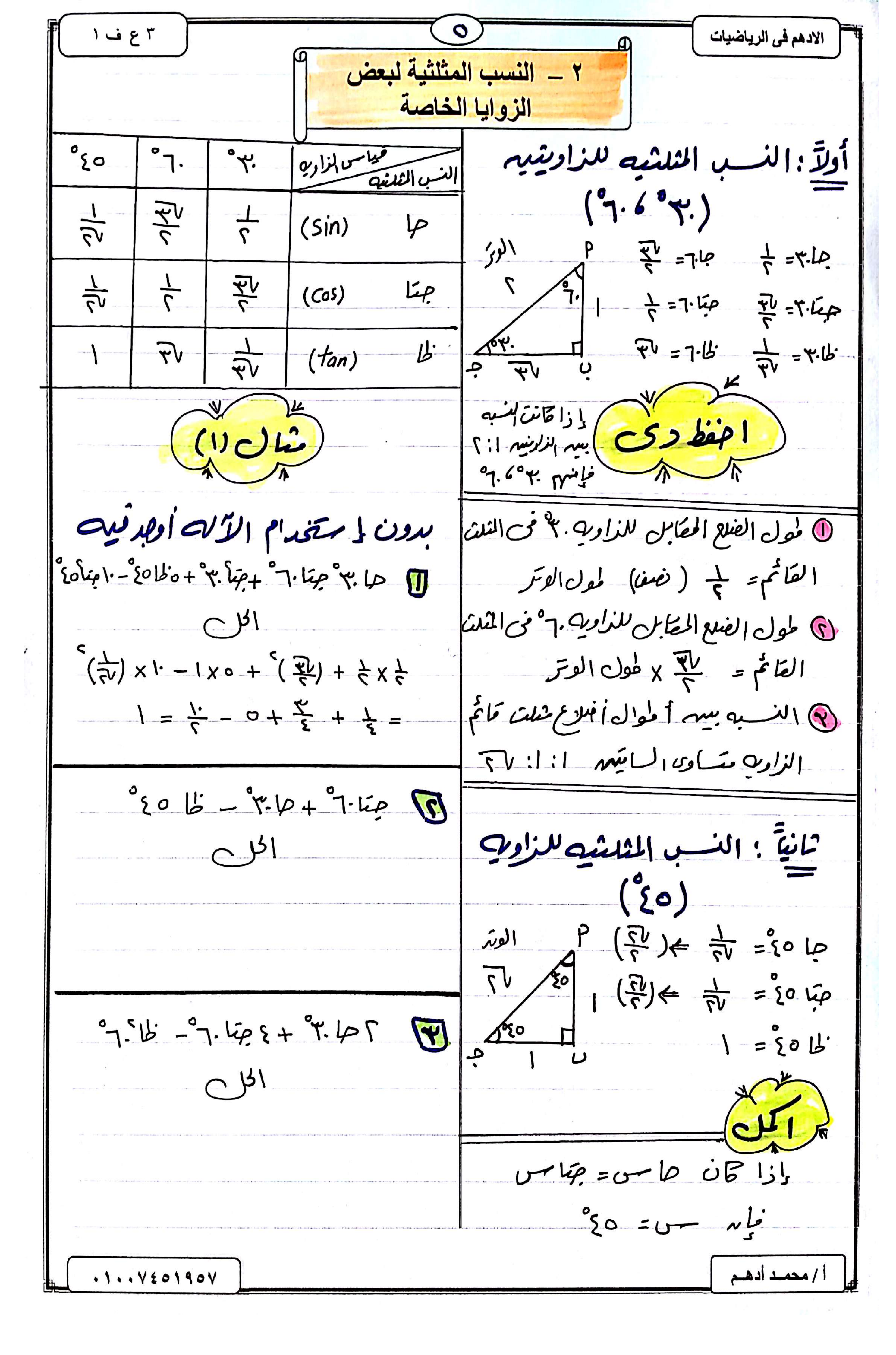
جا أ = جتا ب فإن ق(أ) + ق(ب) = ----

③ إذا كانت أ ، ب زاويتين حادتين وكان

جا ب = جتا أ فإن ق(أ) = ---- حيث ق(ب) = ٤٠°

④ في Δ أ ب جـ القائم الزاوية في ب يكون

جا أ + جتا جـ = ---- (الحل: ٢ جا أ أو ٢ جتا جـ)



٢ – النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

أولاً: النسب المثلثية للزاويتين (٣٠°، ٦٠°)

جا ٣٠ = $\frac{١}{٢}$ ، جا ٦٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جتا ٣٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جتا ٦٠ = $\frac{١}{٢}$

ظا ٣٠ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، ظا ٦٠ = $\sqrt{٣}$

احفظ دى

إذا كانت النسبة بين الزاويتين ١ : ٢ فإنهم ٣٠°، ٦٠°

① طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° فى المثلث القائم = $\frac{١}{٢}$ (نصف) طول الوتر

② طول الضلع المقابل للزاوية ٦٠° فى المثلث القائم = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × طول الوتر

③ النسبة بين أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية متساوى الساقين ١ : ١ : $\sqrt{٢}$

ثانياً: النسب المثلثية للزاوية (٤٥°)

جا ٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ⟵ ($\frac{\sqrt{٢}}{٢}$)

جتا ٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ⟵ ($\frac{\sqrt{٢}}{٢}$)

ظا ٤٥ = ١

اكمل

إذا كان جا س = جتا س

فإن س = ٤٥°

قياس الزاوية / النسب المثلثية		٣٠°	٦٠°	٤٥°
جا	(sin)	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
جتا	(cos)	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
ظا	(tan)	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	$\sqrt{٣}$	١

مثال (١)

بدون استخدام الآلة أوجد قيمة

① جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا² ٣٠° + ٥ ظا ٤٥° − ١٠ جتا² ٤٥°

الحل

$\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} + \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢} + ٥ \times ١ - ١٠ \times \left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}$

$= \frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤} + ٥ - \frac{١٠}{٢} = ١$

② جتا ٦٠° + جا ٣٠° − ظا ٤٥°

الحل

③ ٢ جا ٣٠° + ٤ جتا ٦٠° − ظا² ٦٠°

الحل

مثال (١)

اثبت أن

(١) $\sin 60^\circ = 2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ$

الحل

الطرف الايمن $= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

الطرف الايسر $= 2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ$

$= 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ الطرفان متساويان

(٢) $\cos 60^\circ = 2 \cos^2 30^\circ - 1$

الحل

مثال (٣)

أوجد قيمة س التى تحقق أن

(١) $س \sin 30^\circ \cos^2 45^\circ = \cos^2 30^\circ$

الحل

$س \times \frac{1}{2} \times (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2$

$س \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

$س \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ ∴ $س = \frac{3}{4} \div \frac{1}{4}$

$س = \frac{3}{4} \times \frac{4}{1} = 3$

(٢) $س \cos 30^\circ = \tan 60^\circ$

(حل انت)

إيجاد قياس الزاوية إذا علمت إحدى نسبها المثلثية

مثال (١)

أوجد قيمة هـ فى كل مما يأتى حيث هـ زاوية حادة

(١) $\sin هـ = 0.8$

shift sin 0 . 8 = °'"

∴ هـ ≃ $53^\circ\ 7'\ 48''$

(٢) $\sin هـ = 0.6$

(٣) $\cos هـ = 0.7152$

shift cos 0 . 7 1 5 2 = °'"

هـ ≃ $44^\circ\ 20'\ 25''$

(٤) $\cos هـ = 0.3824$

(٥) $\tan هـ = 1.0156$

shift tan 1 . 0 1 5 6 = °'"

∴ هـ ≃ $56^\circ\ 34'\ 59''$

(٦) $\tan هـ = 1$

الواجب

(١) بدون استخدام الآلة أثبت أن

1. جتا ٦٠° = ٢ جتا² ٣٠° − ١
2. ٢ جتا² ٣٠° − ١ = ١ − ٢ جا² ٣٠°
3. جتا ٦٠° = جتا² ٣٠° − جا² ٣٠°
4. جتا² ٦٠° = ٥ جا² ٣٠° − ظا² ٤٥°
5. ظا ٦٠° = $\frac{\text{٢ ظا ٣٠°}}{\text{١ − ظا² ٣٠°}}$

(٢) أوجد قيمة س التى تحقق أن

1. س جا² ٤٥° = ظا² ٦٠°
2. س جا ٣٠° جتا² ٤٥° = جا² ٦٠°
3. س جا ٤٥° جتا ٤٥° ظا ٦٠° = ظا² ٤٥° − جتا² ٦٠°
4. ٤ س = جتا² ٣٠° ظا² ٣٠° ظا² ٤٥°
5. ظا س = ٤ جا ٣٠° جتا ٦٠°
6. ٢ جا س = جا ٤٥° جتا ٤٥° + جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا² ٣٠°

(٣) أوجد قيمة هـ حيث هـ زاوية حادة

1. جا هـ = ٠.٦٥
2. جا² ٤٥° = جتا هـ ظا ٣٠°
3. جا هـ جا² ٦٠° = ٣ جا ٤٥° جتا² ٤٥° جتا ٦٠°
4. ٣ ظا هـ − ٤ جا² ٣٠° = ٨ جتا² ٦٠°
5. جا هـ = جتا ٦٠°

(٤) إذا كان ظا س = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ حيث س حادة

فأوجد قيمة جا س ظا $\left(\frac{\text{٣س}}{\text{٢}}\right)$ + جتا (٢س)

(٥) فى الشكل المقابل

أ ب جـ د شبه منحرف متساوى الساقين

أب = أد = دجـ = ٥ سم

، ب جـ = ١١ سم

أوجد (١) ق(ب̂) ، ق(أ̂)

(٢) مساحة شبه المنحرف أ ب جـ د

(٦) فى الشكل المقابل

ق(أ̂) = ٢ ق(جـ̂)

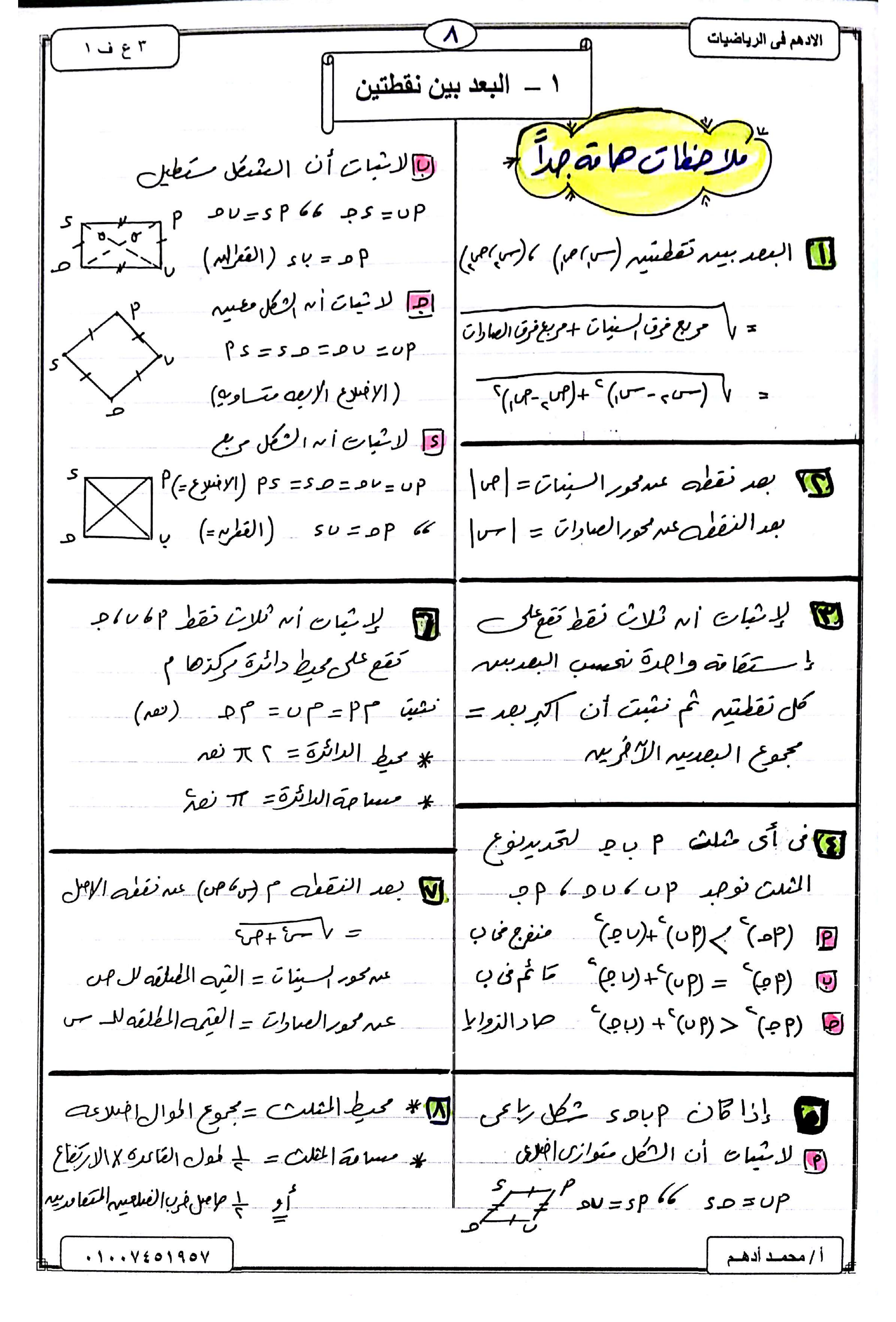
أوجد قيمة المقدار

جتا² أ + ظا² جـ

(٧) كسرت الرياح الجزء العلوى من شجرة فصنع مع الأرض زاوية قياسها ٦٠° ، إذا كانت نقطة تلاقى قمة الشجرة بالأرض تبعد عن قاعدة الشجرة مسافة ٤ أمتار أوجد طول الشجرة لأقرب متر.

(٨) أكمل

1. جا ٤٥° − جتا ٤٥° = ----
2. جتا ٦٠° + جا ٣٠° = ----
3. جا ٣٠° + جتا ٦٠° − ظا ٤٥° = ----
4. ٤ جتا ٣٠° × ظا ٦٠° = ----
5. ظا ٤٥° × جا ٣٠° = ----
6. كم عدد محافظات جمهورية مصر العربية



١ – البعد بين نقطتين

ملاحظات هامة جداً

[١] البعد بين نقطتين $(س_١ ، ص_١)$ ، $(س_٢ ، ص_٢)$

$= \sqrt{\text{مربع فرق السينات + مربع فرق الصادات}}$

$= \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

[٢] بعد نقطة عن محور السينات $= |ص|$

بعد النقطة عن محور الصادات $= |س|$

[٣] لإثبات أن ثلاث نقط تقع على استقامة واحدة نحسب البعد بين كل نقطتين ثم نثبت أن أكبر بعد = مجموع البعدين الآخرين

[٤] في أي مثلث أ ب جـ لتحديد نوع المثلث نوجد أ ب ، ب جـ ، أ جـ

(أ) $(أ جـ)^٢ > (أ ب)^٢ + (ب جـ)^٢$ منفرج في ب

(ب) $(أ جـ)^٢ = (أ ب)^٢ + (ب جـ)^٢$ قائم في ب

(جـ) $(أ جـ)^٢ < (أ ب)^٢ + (ب جـ)^٢$ حاد الزوايا

[٥] إذا كان أ ب جـ د شكل رباعي

(أ) لإثبات أن الشكل متوازي أضلاع

أ ب = جـ د ، أ د = ب جـ

(ب) لإثبات أن الشكل مستطيل

أ ب = جـ د ، أ د = ب جـ

أ جـ = ب د (القطران)

(جـ) لإثبات أن الشكل معين

أ ب = ب جـ = جـ د = د أ

(الأضلاع الأربعة متساوية)

(د) لإثبات أن الشكل مربع

أ ب = ب جـ = جـ د = د أ (الأضلاع =)

، أ جـ = ب د (القطران =)

[٦] لإثبات أن ثلاث نقط أ ، ب ، جـ تقع على محيط دائرة مركزها م

نثبت أن م أ = م ب = م جـ (نق)

* محيط الدائرة = ٢ π نق
* مساحة الدائرة = π نق^٢

[٧] بعد النقطة م (س ، ص) عن نقطة الأصل

$= \sqrt{س^٢ + ص^٢}$

عن محور السينات = القيمة المطلقة لـ ص

عن محور الصادات = القيمة المطلقة لـ س

[٨]
* محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه
* مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع

أو $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب الضلعين المتعامدين

مثال (١)

إذا كان أ(٢، ٥) ، ب(-١، ١) فأوجد طول $\overline{\text{أب}}$ (البعد بينهما)

الحل

أ(٢، ٥) (س١، ص١) ، ب(-١، ١) (س٢، ص٢)

$\text{أب} = \sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$

$= \sqrt{(-١-٢)^٢ + (١-٥)^٢} = \sqrt{(-٣)^٢ + (-٤)^٢}$

$= \sqrt{٩ + ١٦} = ٥$ وحدة طول

تمرين (١)

إذا كان أ(١، ٢) ، ب(٤، ٦) فأوجد طول $\overline{\text{أب}}$

الحل

مثال (٢)

إذا كان البعد بين (أ، ٠) ، (٠، ١) هو وحدة طول واحدة فأوجد قيمة أ

الحل

(أ، ٠) (س١، ص١) ، (٠، ١) (س٢، ص٢)

$\because \sqrt{(٠-\text{أ})^٢ + (١-٠)^٢} = ١$

$\therefore \sqrt{\text{أ}^٢ + ١} = ١$ بتربيع الطرفين

$\text{أ}^٢ + ١ = ١$ ، $\text{أ}^٢ = ١ - ١ = ٠$ $\therefore$ أ = ٠

تمرين (٢)

إذا كان البعد بين النقطتين (أ، ٧) ، (-٢، ٣) = ٥ فأوجد قيمة أ

الحل

مثال (٣)

أثبت أن النقاط أ(-٢، ٧) ، ب(-٣، ٤) ، جـ(١، ١٦) تقع على استقامة واحدة

الحل

$\text{أب} = \sqrt{(-٣+٢)^٢ + (٤-٧)^٢} = \sqrt{١+٩} = \sqrt{١٠}$ وحدة طول

$\text{بجـ} = \sqrt{(١+٣)^٢ + (١٦-٤)^٢} = \sqrt{١٦+١٤٤} = ٤\sqrt{١٠}$ وحدة

$\text{أجـ} = \sqrt{(١+٢)^٢ + (١٦-٧)^٢} = \sqrt{٩+٨١} = ٣\sqrt{١٠}$ وحدة طول

$\because$ بجـ $= ٤\sqrt{١٠}$

، أب + أجـ $= \sqrt{١٠} + ٣\sqrt{١٠} = ٤\sqrt{١٠}$

$\therefore$ بجـ = أب + أجـ

$\therefore$ أ، ب، جـ تقع على استقامة واحدة

تمرين (٣)

أثبت أن النقط أ(٤، ٣) ، ب(١، ١) ، جـ(-٥، -٣) تقع على استقامة واحدة

الحل

مثال (٤)

أثبت أن المثلث الذي رؤوسه النقط أ$(٥ ، -٥)$ ، ب$(-١ ، ٧)$ ، جـ$(١٥ ، ١٥)$ قائم الزاوية في ب ثم أوجد مساحته

الحل

$أب = \sqrt{(-١-٥)^٢ + (٧+٥)^٢} = \sqrt{٣٦ + ١٤٤}$

$= \sqrt{١٨٠}$ وحدة طول

، $ب جـ = \sqrt{(١٥+١)^٢ + (١٥-٧)^٢}$

$= \sqrt{٢٥٦ + ٦٤} = \sqrt{٣٢٠}$ وحدة طول

، $أ جـ = \sqrt{(١٥-٥)^٢ + (١٥+٥)^٢}$

$= \sqrt{١٠٠ + ٤٠٠} = \sqrt{٥٠٠}$ وحدة طول

$(أب)^٢ = ١٨٠$ ، $(ب جـ)^٢ = ٣٢٠$ ، $(أ جـ)^٢ = ٥٠٠$

$\therefore (أ جـ)^٢ = (أب)^٢ + (ب جـ)^٢$

$\therefore$ المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب

مساحة $\triangle$ أ ب جـ $= \frac{١}{٢}$ أب $\times$ ب جـ

$= \frac{١}{٢} \sqrt{١٨٠} \times \sqrt{٣٢٠} = ١٢٠$ وحدة مربعة

تمرين (٤)

أثبت أن المثلث الذي رؤوسه أ$(٣ ، ٢)$ ، ب$(-٤ ، ١)$ ، جـ$(٢ ، -١)$ قائم الزاوية وأوجد مساحته

الحل

مثال (٥)

أثبت أن النقط أ$(٠ ، ١)$ ، ب$(٤ ، ٥)$ ، جـ$(١ ، ٨)$ ، د$(-٣ ، ٤)$ هي رؤوس مستطيل ثم احسب طول قطره

الحل

(شكل: المستطيل أ ب جـ د وقطراه)

$أب = \sqrt{(٠-٤)^٢ + (١-٥)^٢}$

$= \sqrt{١٦ + ١٦} = ٤\sqrt{٢}$ وحدة طول

، $ب جـ = \sqrt{(٤-١)^٢ + (٥-٨)^٢}$

$= \sqrt{٩ + ٩} = ٣\sqrt{٢}$ وحدة طول

، $جـ د = \sqrt{(١+٣)^٢ + (٨-٤)^٢}$

$= \sqrt{١٦ + ١٦} = ٤\sqrt{٢}$ وحدة طول

، $أ د = \sqrt{(٠+٣)^٢ + (١-٤)^٢}$

$= \sqrt{٩+٩} = ٣\sqrt{٢}$ وحدة طول

، $أ جـ = \sqrt{(٠-١)^٢ + (١-٨)^٢}$

$= \sqrt{١+٤٩} = ٥\sqrt{٢}$ وحدة طول

، $ب د = \sqrt{(٤+٣)^٢ + (٥-٤)^٢}$

$= \sqrt{٤٩ + ١} = ٥\sqrt{٢}$ وحدة طول

$\therefore$ أب = جـ د ، ب جـ = أ د ، أ جـ = ب د

$\therefore$ الشكل أ ب جـ د مستطيل

وطول قطره $= ٥\sqrt{٢}$ وحدة طول

تمرين (٥)

أثبت أن النقط أ$(-٦ ، ٢)$ ، ب$(٠ ، ٨)$ تقع على دائرة مركزها م$(-٤ ، ٦)$ ثم أوجد محيطها ومساحتها $\pi = ٣,١٤$



الواجب

١ أوجد طول أب في الحالات الآتية

① أ(١ ، ٢) ، ب(٤ ، ٦)

② أ(-٢ ، ٧) ، ب(٣ ، -٥)

③ أ(١٥ ، ٠) ، ب(٦ ، ٠)

④ أ(٢ ، -٣) ، ب(-١ ، ١)

٢ بين أي من النقط التالية تقع على استقامة واحدة

① أ(٤ ، ٣) ، ب(١ ، ١) ، جـ(-٥ ، -٣)

② أ(١ ، ٤) ، ب(٣ ، -٢) ، جـ(-٣ ، ١٦)

③ أ(٧ ، ٠) ، ب(-٣ ، ٦) ، جـ(٢٢ ، ٩)

٣ أثبت أن

① المثلث الذي رؤوسه أ(-١ ، -١) ، ب(٢ ، ٣) ، جـ(٦ ، ٠) قائم الزاوية

② المثلث الذي رؤوسه أ(٥ ، ٠) ، ب(٧ ، ٢√٣) ، جـ(٣ ، ٢√٣) متساوي الأضلاع ثم أوجد محيطه.

③ الشكل أ(-١ ، ١) ، ب(٠ ، ٥) ، جـ(٥ ، ٦) ، د(٤ ، ٢) متوازي أضلاع

④ الشكل أ(٣ ، ٣) ، ب(٠ ، ٣) ، جـ(٠ ، ٠) ، د(٣ ، ٠) هو مربع ثم احسب طول قطره ومساحته

⑤ النقط أ(٣ ، -١) ، ب(-٤ ، ٦) ، جـ(٢ ، -٢) تقع على محيط دائرة م(-١ ، ٢) ثم احسب محيط الدائرة ومساحتها (π = ٣.١٤)

٤ إذا كان البعد بين أ(س ، ٢) ، ب(٣ ، -١) = √١٧ فأوجد قيمة س

٥ إذا كان أ(س ، ٣) ، ب(٣ ، ٢) ، جـ(٥ ، ١) وكانت أب = بجـ فأوجد قيمة س

٦ أكمل

① البعد بين أ(٦ ، ٠) ، ب(٠ ، ٨) = ----

② طول نصف قطر الدائرة التي مركزها (٧ ، ٤) وتمر بالنقطة (٣ ، ١) = ----

③ إذا كان أ ب جـ د مربع وكان أ(٣ ، ٥) ، ب(٤ ، ٢) فإن مساحته = --- وحدة مربعة

④ بعد النقطة (-٣ ، ٤) عن نقطة الأصل = ----
وعن محور السينات = ---
وعن محور الصادات = ---

⑤ بعد النقطة (-٦ ، -٨) عن نقطة الأصل = ---
وعن محور السينات = ... وعن محور الصادات = ---

⑥ طول قطر الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة (٣ ، -٤) = ---

٢ – إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة

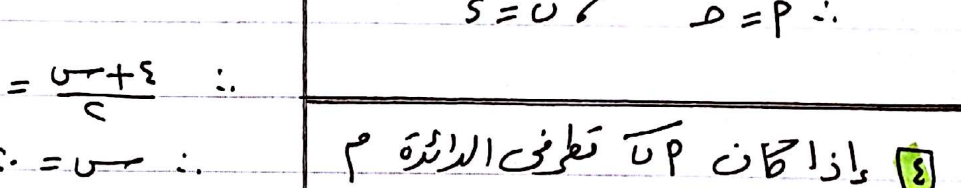
ملاحظات زي كل مرة

١) إذا كان أ(س١ ، ص١) ، ب(س٢ ، ص٢) فإن منتصف $\overline{أب}$ = $\left(\frac{س١+س٢}{٢} ، \frac{ص١+ص٢}{٢}\right)$

٢) إذا كان المطلوب نقطة على الطرف وليس المنتصف نفرضها (س ، ص) ثم نكون معادلتين ونحلهم كما سنرى بعد شوية حلوة بعد شوية دي؟

٣) (أ ، ب) = (جـ ، د)

∴ أ = جـ ، ب = د



٤) إذا كان $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م فإن مركز الدائرة هو منتصف $\overline{أب}$

مثال (١)

أوجد منتصف $\overline{أب}$ في كل مما يلي

١) أ(١ ، ٥) ، ب(٣ ، ١)

م = $\left(\frac{١+٣}{٢} ، \frac{٥+١}{٢}\right)$ = (٢ ، ٣)

٢) أ(٣ ، -٢) ، ب(٥ ، ٢)

م = (،) = (،)

٣) أ(-١ ، ٢) ، ب(٥ ، -٤)

مثال (٢)

إذا كانت جـ(١٠ ، -٤) هي منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(٤ ، -٢) فأوجد ب

الحل

أ(٤ ، -٢) م(١٠ ، -٤) ب(س ، ص)

(١٠ ، -٤) = $\left(\frac{٤+س}{٢} ، \frac{-٢+ص}{٢}\right)$

∴ $\frac{٤+س}{٢}$ = ١٠ ٤ + س = ٢٠

∴ س = ٢٠ - ٤ = ١٦

، $\frac{-٢+ص}{٢}$ = -٤ -٢ + ص = -٨

ص = -٨ + ٢ = -٦

∴ ب(١٦ ، -٦)

تمرين (٢)

إذا كان جـ(٢ ، ٥) هي منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(-٢ ، -٣) فأوجد احداثيات ب

الحل

مثال (٣)

أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه أ(٣ ، ٢) ، ب(٤ ، -٥) ، د(٠ ، -٣) فأوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطريه ثم أوجد إحداثيي نقطة د

الحل

أولاً: إحداثيي نقطة تقاطع قطريه (منتصف $\overline{أجـ}$ أو $\overline{بد}$)

م = ((٣+٠)/٢ ، (٢-٣)/٢) = (١½ ، -½)

∴ نقطة تقاطع قطراه هي (١½ ، -½)

ثانياً: نفرض أن د (س ، ص)

∵ م منتصف $\overline{بد}$

∴ (١½ ، -½) = ((س+٤)/٢ ، (ص-٥)/٢)

∴ (س+٤)/٢ = ١½ ⇐ ∴ س+٤ = ٣

∴ س = ٣ - ٤ = -١

، (ص-٥)/٢ = -½ ⇐ ص-٥ = -١

ص = -١+٥ = ٤

∴ د (-١ ، ٤)

مثال (٤)

إذا كان أب قطراً في دائرة مركزها م فإذا كان ب(٨ ، ١١) ، م(٥ ، ٧) فأوجد

① إحداثيي أ

② محيط الدائرة حيث π = ٣,١٤

الحل

نفرض أن أ(س ، ص)

∴ (٥ ، ٧) = ((س+٨)/٢ ، (ص+١١)/٢)

∴ (س+٨)/٢ = ٥ ⇐ س+٨ = ١٠

س = ١٠ - ٨ ⇐ ∴ س = ٢

، ∴ (ص+١١)/٢ = ٧ ⇐ ص+١١ = ١٤

ص = ١٤ - ١١ ⇐ ∴ ص = ٣

∴ أ(٢ ، ٣)

محيط الدائرة = π × طول القطر أو ٢ π نق

نق = م ب = $\sqrt{(٨-٥)^٢ + (١١-٧)^٢}$

= $\sqrt{٩+١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدة طول

∴ محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ × ٣,١٤ × ٥

= ٣١,٤ وحدة طول

تمرين (٣)

إذا كان أب قطراً في الدائرة م حيث أ(٤ ، -١) ، ب(-٢ ، ٧) فأوجد إحداثيي م ثم أوجد محيط ومساحة الدائرة.

الواجب

[١] أوجد احداثيات منتصف أب

(١) أ(٣ ، ٥) ، ب(٧ ، ١)

(٢) أ(٢ ، ٤) ، ب(٦ ، ٠)

(٣) أ(٧ ، -٦) ، ب(-١ ، ٠)

(٤) أ(٥ ، -٣) ، ب(-١ ، ٣)

[٢] إذا كان

(١) ج(٤ ، ٦) منتصف أب حيث أ(س ، ٣) ، ب(٦ ، ص) فأوجد قيمة س ، ص

(٢) ج(٢ ، -٦) منتصف أب ، أ(س ، ٤) ، ب(-٢ ، ص) فأوجد س ، ص

(٣) ج(١ ، ٥) منتصف أب حيث أ(٣ ، ٧) فأوجد احداثيي ب

(٤) م(٢ ، ١) مركز الدائرة التي أب قطر فيها وكان أ(٠ ، ٤) فأوجد ب

(٥) (٢أ-٣ ، أ-٥) منتصف القطعة التي طرفاها (٧ ، -١) ، (٣ ، ٧) فأوجد قيمتي أ ، ب

[٣] أثبت أن

أ(٣ ، -٢) ، ب(-٥ ، ٠) ، ج(٠ ، -٧) ، د(٨ ، -٩) هي رؤوس متوازي أضلاع ← ارشاد اثبت أن منتصف أج هو نفسه منتصف بد

[٤] أثبت أن أ(-٣ ، ٠) ، ب(٣ ، ٤) ، ج(١ ، -٦) هي رؤوس مثلث متساوي الساقين رأسه أ ثم أوجد طول القطعة المستقيمة المرسومة من أ عمودية على بج

[٥] أثبت أن أ(٦ ، ٠) ، ب(٢ ، -٤) ، ج(-٤ ، ٢) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية في ب ثم أوجد احداثيي نقطة د التي تجعل الشكل أ ب ج د مستطيل.

[٦] أكمل

(١) منتصف (٥ ، ٢) ، (-١ ، -٤) هو ----

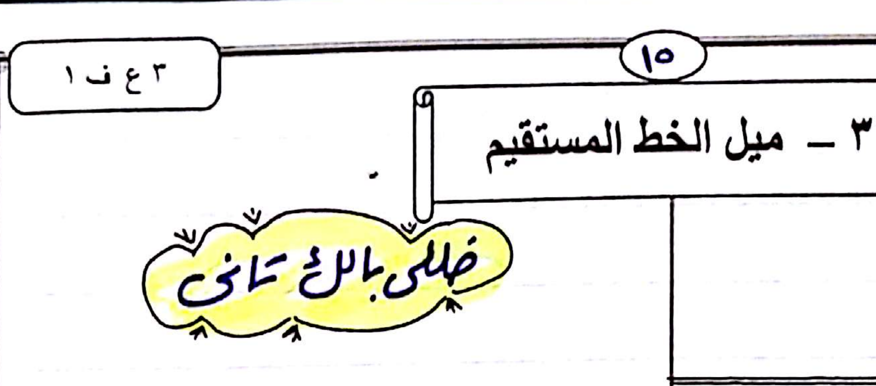
(٢) منتصف (٣ ، ١) ، (-١ ، -٥) هو ----

(٣) أب قطر في الدائرة حيث أ(-١ ، ٤) ، ب(٧ ، ٦) فإن مركز الدائرة = ----

(٤) إذا كانت نقطة الأصل هي منتصف أب حيث أ(٥ ، -٢) فإن ب = ----

(٥) إذا كان أ(٣ ، ص) ، ب(٥ ، -٢) ، ج منتصف أب حيث ج(س ، ٢) فإن س = ---- ، ص = ----

كفاية عليكوا كده؟





١ ميل المستقيم المار بالنقطتين

(س١، ص١) ، (س٢، ص٢)

= فرق الصادات / فرق السينات = (ص٢ – ص١) / (س٢ – س١)

مثال (١)

أوجد ميل المستقيم المار بكل زوج من النقاط التالية

١ أ (٢، ٠) ، ب (٧، ٥)

الحل

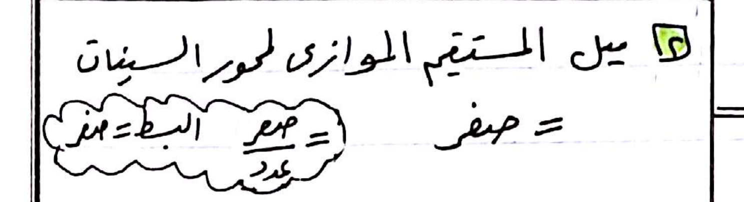
س١ = ٢ ص١ = ٠ س٢ = ٧ ص٢ = ٥

الميل = (ص٢ – ص١) / (س٢ – س١) = (٥ – ٠) / (٧ – ٢)

= ٥/٥ = ١

٢ (٤، ٢) ، (٥، ٦)

الحل



١ ميل الخط المستقيم هو ظل الزاوية التى يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

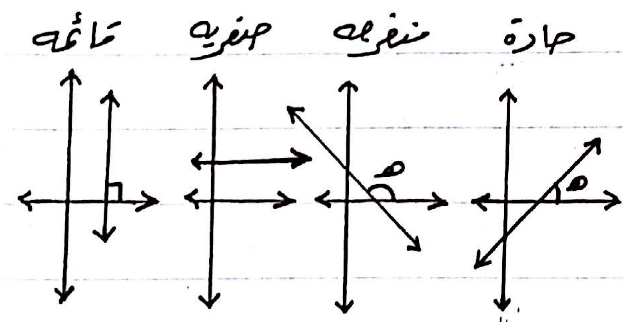
٢ ميل المستقيم الموازى لمحور السينات = صفر

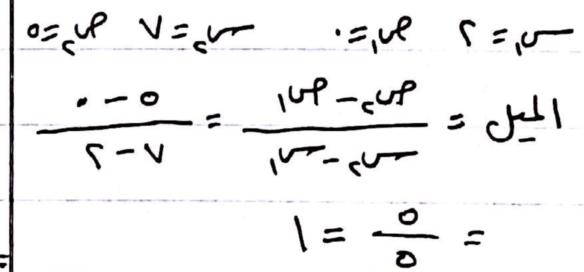
(= صفر / عدد البسط = صفر)

٣ ميل المستقيم الموازى لمحور الصادات غير معرف

(يعنى عدد / صفر المقام = ٠)

٤ العلاقة بين الميل والزاوية





القياس الموجب والسالب

* القياس الموجب فى عكس اتجاه عقارب الساعة.

* القياس السالب فى اتجاه عقارب الساعة

مثال (١)

أوجد ميل المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

① $٤٥°$

م = ظا $٤٥°$ = ١

② $١٢٤° \ ١٥' \ ١٢''$

م = ظا $١٢٤° \ ١٥' \ ١٢''$ = −٦٨٥٤٦٨٠ ,١

③ $٣٠°$

④ $٦٠°$

⑤ $٩٠°$ (عمودى على محور السينات)

موازى لمحور الصادات

الميل غير معرف

⑥ صفر

مثال (٢)

أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان

① م = ١,٤٨٦

∵ م = ظا هـ ∴ ظا هـ = ١,٤٨٦

∴ هـ = $٥٦° \ ٣' \ ٤١''$

② $\sqrt{٣}$

مثال (٣)

أوجد قياس الزاوية (هـ) التى يصنعها المستقيم ل مع الاتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان يمر بالنقطتين

① $(-٢ ، \sqrt{٣})$ ، $(١ ، ٤\sqrt{٣})$

الحل

ميل ل $= \dfrac{٤\sqrt{٣} - \sqrt{٣}}{١ + ٢} = \dfrac{٣\sqrt{٣}}{٣}$

م = $\sqrt{٣}$ الميل موجب ∴ الزاوية حادة

∴ ظا هـ = $\sqrt{٣}$

∴ هـ = $٦٠°$

② $(-٢ ، ٣)$ ، $(-٣ ، ٤)$

الحل

ميل ل $= \dfrac{٤ - ٣}{-٣ + ٢} = \dfrac{١}{-١} = -١$

الميل سالب ∴ الزاوية منفرجة

ظا هـ = −١

∴ هـ = $١٣٥°$ $(١٨٠° - ٤٥°)$

③ $(-٤ ، -١)$ ، $(٥ ، -٣)$

الحل

العلاقة بين ميلي المستقيمين المتوازيين

١) إذا توازى مستقيمان فإن ميلاهما يكونان متساويان

$ل_1 \parallel ل_2 \quad \therefore \quad م_1 = م_2$

٢) إذا تساوى ميلا مستقيمان فإن المستقيمان يكونان متوازيان

$م_1 = م_2 \quad \therefore \quad ل_1 \parallel ل_2$

٣) لإثبات أن أ ، ب ، ج على استقامة واحدة فلابد أن يكون

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{بج}$

مثال (١)

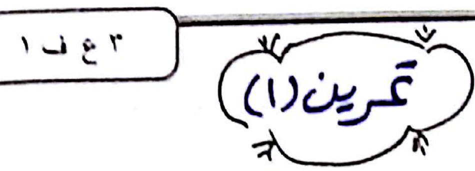
أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٢،٣) ، (-١،٦) يوازي المستقيم الذي يصنع ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الحل

$م_1 = \frac{6-3}{-1-2} = \frac{3}{-3} = -1$

$م_2 = ظا 135 = -1$

$\therefore م_1 = م_2 \quad \therefore ل_1 \parallel ل_2$



تمرين (١)

أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (١،٥) ، (-٢،-١) يوازي المستقيم المار بالنقطتين (٠،-١) ، (٥،٩)

الحل

مثال (٣)

اثبت أن النقط أ(١،١) ، ب(٢،٣) ، ج(٠،-١) تقع على استقامة واحدة

الحل

ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{3-1}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$

، ميل $\overleftrightarrow{بج} = \frac{-1-3}{0-2} = \frac{-4}{-2} = 2$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{بج}$ لهما نفس الميل ومشتركين في النقطة ب

$\therefore$ أ ، ب ، ج تقع على استقامة واحدة

تمرين (٢)

اثبت أن النقط أ(-١،٦) ، ب(٣،-٤) ، ج(٢، -١,٥) تقع على استقامة واحدة

!! حل انت !!

العلاقة بين ميلى المستقيمين المتعامدين

١ إذا كان $ل_1 \perp ل_2$ فإن $م_1 \times م_2 = -1$

٢ إذا كان $م_1 \times م_2 = -1$ فإن $ل_1 \perp ل_2$

⇓

إذا كان المستقيمان متعامدان فإن حاصل ضرب ميلاهما = -١ "والعكس صحيح"

٣ في المثلث القائم ضلعى القائمة يكونان متعامدان (حاصل ضرب ميلاهما = -١)

مثال (١)

اثبت أن المستقيم ل١ المار بالنقطتين (-١، ٤)، (٣، ٧) يكون عمودياً على المستقيم ل٢ المار (١، ١)، (٤، -٣)

الحل

ميل $ل_1 = \frac{٧ - ٤}{٣ + ١} = \frac{٣}{٤}$

، ميل $ل_2 = \frac{-٣ - ١}{٤ - ١} = \frac{-٤}{٣}$

∵ $م_1 \times م_2 = \frac{٣}{٤} \times \frac{-٤}{٣} = -١$

∴ $ل_1 \perp ل_2$ #

ملحوظة عشان نجيب ميل العمود

بنقلب الكسر ونغير إشارة واحدة.

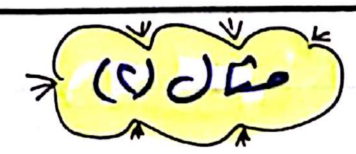
$\frac{٢}{٣} \perp \frac{-٣}{٢}$ ، $\frac{٥}{٦} \perp \frac{-٦}{٥}$

وهكذا $٤ \perp \frac{-١}{٤}$

تمرين (١)

اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٤، ٣√٣)، (٥، ٢√٣) عمودي على المستقيم الذي يصنع ٣٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الحل



مثال (٢)

إذا كانت أ (١، ٧)، ب (٢، ٤)، جـ (٥، ص) تمثل رؤوس مثلث قائم في ب فأوجد قيمة ص

الحل

$م_1$ ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{٤ - ٧}{٢ - ١} = -٣$

$م_2$ ميل $\overleftrightarrow{بجـ} = \frac{ص - ٤}{٥ - ٢} = \frac{ص - ٤}{٣}$

∵ $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{بجـ}$

∴ $م_1 \times م_2 = -١$

∴ $-٣ \times \frac{ص - ٤}{٣} = -١$

$-ص + ٤ = -١$

$-ص = -١ - ٤$ $-ص = -٥$

∴ $ص = ٥$

ملاحظات لحل مسائل الأشكال الرباعية باستخدام الميل

١ لاثبات ان الشكل شبه منحرف
نثبت أن ضلعان متقابلان متوازيان والضلعان الآخران غير متوازيان

٢ لاثبات ان الشكل متوازي أضلاع
نثبت واحدة فقط مما يلي
1. كل ضلعين متقابلين متوازيين
2. كل ضلعين متقابلين متساويين في الطول
3. ضلعان متقابلان متوازيان ومتساويان
4. القطران ينصف كل منهما الآخر

بعد اثبات ان الشكل متوازي أضلاع أولاً

أ مستطيل (واحدة فقط)
1. ضلعان متجاوران متعامدان أو
2. القطران متساويان في الطول

ب معين (واحدة فقط)
1. القطران متعامدان أو
2. ضلعان متجاوران متساويان في الطول

جـ مربع (واحدة فقط)
1. ضلعان متجاوران متعامدان ومتساويان
2. القطران متساويان في الطول ومتعامدان
3. ضلعان متجاوران متعامدان والقطران متعامدان
4. ضلعان متجاوران متساويان والقطران متساويان

مثال (١)
باستخدام الميل اثبت أن النقاط
أ (-١، ٣) ، ب (٥، ١) ، جـ (٦، ٤) ، د (٠، ٦) رؤوس مستطيل

الحل

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٣-١}{١+٥}$ = $-\frac{١}{٣}$

ميل $\overleftrightarrow{دجـ}$ = $\frac{٦-٤}{٠-٦}$ = $\frac{٢}{-٦}$ = $-\frac{١}{٣}$

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{دجـ}$ ⟸ (١)

ميل $\overleftrightarrow{أد}$ = $\frac{٦-٣}{٠+١}$ = $\frac{٣}{١}$ = ٣

ميل $\overleftrightarrow{بجـ}$ = $\frac{٤-١}{٦-٥}$ = $\frac{٣}{١}$ = ٣

∴ $\overleftrightarrow{أد}$ // $\overleftrightarrow{بجـ}$ ⟸ (٢)

∴ من (١) ، (٢)

∴ الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع

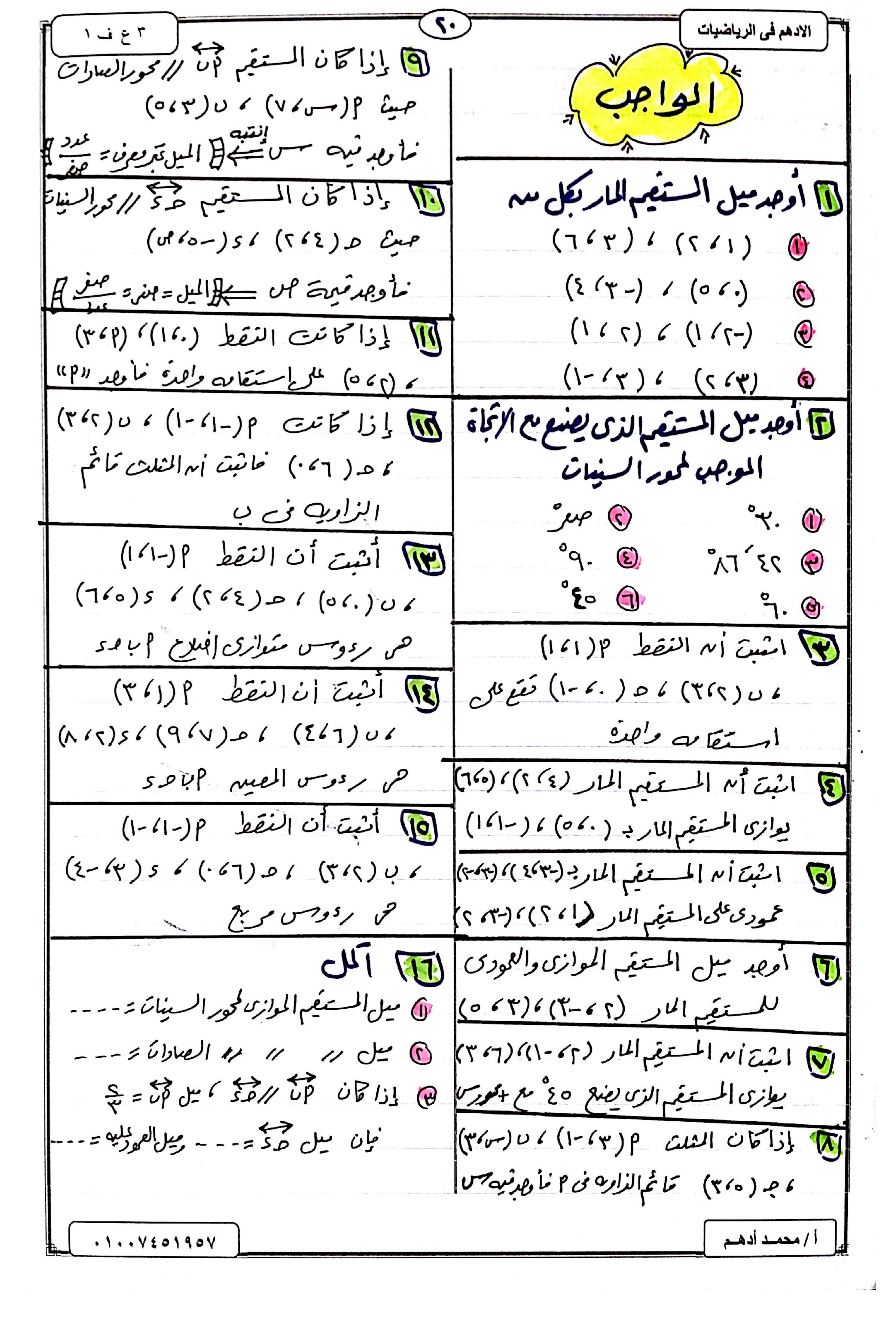
، ∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $-\frac{١}{٣}$ ، ميل $\overleftrightarrow{بجـ}$ = ٣

∴ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ × ميل $\overleftrightarrow{بجـ}$ = $-\frac{١}{٣}$ × ٣ = -١

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{بجـ}$

∴ الشكل أ ب جـ د مستطيل

تمرين (١)
أ ب جـ د معين فيه أ (٣، ٢) ، ب (٤، ك) ، د (-١، -٢)
أوجد
1. قيمة ك
2. طول $\overline{بد}$



الواجب

1 أوجد ميل المستقيم المار بكل من

(1) (١ ، ٢) ، (٣ ، ٦)

(2) (٠ ، ٥) ، (-٣ ، ٤)

(3) (-٢ ، ١) ، (٢ ، ١)

(4) (٣ ، ٢) ، (٣ ، -١)

2 أوجد ميل المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

(1) ٣٠° (2) صفر

(3) ٤٢′ ٨٦° (4) ٩٠°

(5) ٦٠° (6) ٤٥°

3 اثبت أن النقط أ (١ ، ١) ، ب (٢ ، ٣) ، جـ (٠ ، -١) تقع على استقامة واحدة

4 اثبت أن المستقيم المار (٤ ، ٢) ، (٥ ، ٦) يوازى المستقيم المار بـ (٠ ، ٥) ، (-١ ، ١)

5 اثبت أن المستقيم المار بـ (-٣ ، ٤) ، (-٣ ، -٤) عمودى على المستقيم المار (١ ، ٢) ، (-٣ ، ٢)

6 أوجد ميل المستقيم الموازى والعمودى للمستقيم المار (٢ ، -٣) ، (٣ ، ٥)

7 اثبت أن المستقيم المار (٢ ، -١) ، (٦ ، ٣) يوازى المستقيم الذى يصنع ٤٥° مع + محور س

8 إذا كان المثلث أ (٣ ، -١) ، ب (س ، ٣) ، جـ (٥ ، ٣) قائم الزاوية فى أ فأوجد قيمة س

9 إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ // محور الصادات حيث أ (س ، ٧) ، ب (٣ ، ٥) فأوجد قيمة س ⟸ انتبه ⟸ الميل غير معرف = عدد/صفر

10 إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{جـ د}$ // محور السينات حيث جـ (٤ ، ٢) ، د (-٥ ، ص) فأوجد قيمة ص ⟸ الميل = صفر = صفر/عدد

11 إذا كانت النقط (٠ ، ١) ، (أ ، ٣) ، (٢ ، ٥) على استقامة واحدة فأوجد "أ"

12 إذا كانت أ (-١ ، -١) ، ب (٢ ، ٣) ، جـ (٦ ، ٠) فاثبت أن المثلث قائم الزاوية فى ب

13 أثبت أن النقط أ (-١ ، ١) ، ب (٠ ، ٥) ، جـ (٤ ، ٢) ، د (٥ ، ٦) هى رؤوس متوازى أضلاع أ ب جـ د

14 أثبت أن النقط أ (١ ، ٣) ، ب (٦ ، ٤) ، جـ (٧ ، ٩) ، د (٢ ، ٨) هى رؤوس المعين أ ب جـ د

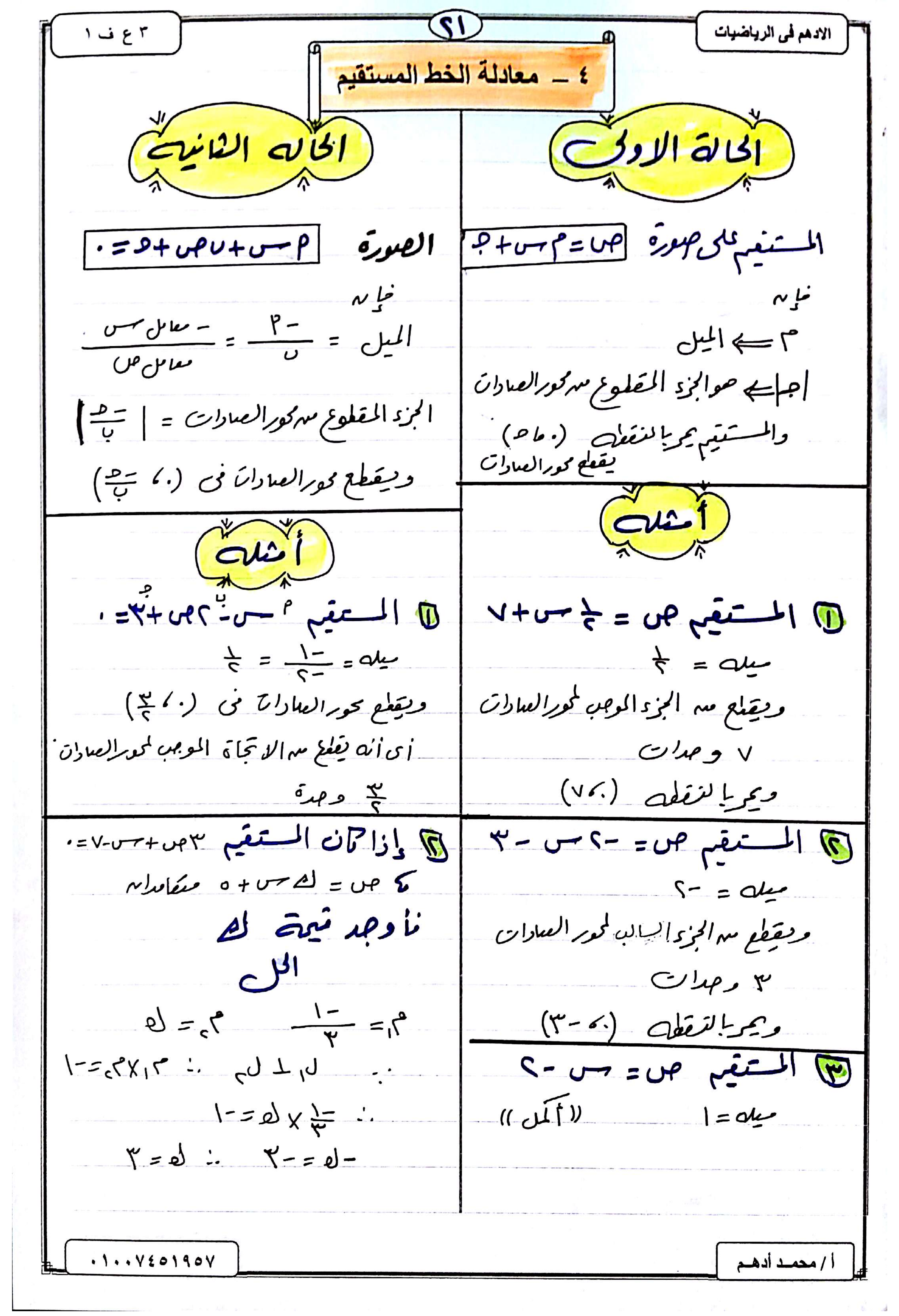
15 أثبت أن النقط أ (-١ ، -١) ، ب (٢ ، ٣) ، جـ (٦ ، ٠) ، د (٣ ، -٤) هى رؤوس مربع

16 أكمل

(1) ميل المستقيم الموازى لمحور السينات = ...

(2) ميل // // الصادات = ...

(3) إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـ د}$ ، ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ٢/٣ فإن ميل $\overleftrightarrow{جـ د}$ = ... ، ميل العمودى عليه = ...



٤ ـ معادلة الخط المستقيم

الحالة الأولى

المستقيم على صورة ص = م س + جـ

خاصية

م ⟸ الميل

|جـ| ⟸ هو الجزء المقطوع من محور الصادات

والمستقيم يمر بالنقطة (٠، جـ)

يقطع محور الصادات

أمثلة

(١) المستقيم ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٧

ميله = $\frac{١}{٢}$

ويقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات ٧ وحدات

ويمر بالنقطة (٠، ٧)

(٢) المستقيم ص = -٢ س - ٣

ميله = -٢

ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات ٣ وحدات

ويمر بالنقطة (٠، -٣)

(٣) المستقيم ص = س - ٢

ميله = ١ «أكمل»

الحالة الثانية

الصورة أ س + ب ص + جـ = ٠

خاصية

الميل = $\frac{-\text{أ}}{\text{ب}}$ = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

الجزء المقطوع من محور الصادات = $\left|\frac{-\text{جـ}}{\text{ب}}\right|$

ويقطع محور الصادات في (٠، $\frac{-\text{جـ}}{\text{ب}}$)

أمثلة

(١) المستقيم س - ٢ص + ٣ = ٠

ميله = $\frac{-١}{-٢}$ = $\frac{١}{٢}$

ويقطع محور الصادات في (٠، $\frac{٣}{٢}$)

أي أنه يقطع من الاتجاه الموجب لمحور الصادات $\frac{٣}{٢}$ وحدة

(٢) إذا كان المستقيم ٣ص + س - ٧ = ٠ ، ٤ص = ك س + ٥ متعامدان

فأوجد قيمة ك

الحل

$م_١ = \frac{-١}{٣}$ ، $م_٢ = ك$

∵ $ل_١ \perp ل_٢$ ∴ $م_١ \times م_٢ = -١$

∴ $\frac{-١}{٣} \times ك = -١$

-ك = -٣ ∴ ك = ٣

٣) أوجد ميل المستقيم ٢ص = ٣س + ١٢ وطول الجزء المقطوع من محور الصادات

الحل

٢ص = ٣س + ١٢ (÷ ٢)

ص = $\frac{٣}{٢}$ س + ٦

الميل = $\frac{٣}{٢}$

ويقطع ٦ وحدات من الجزء الموجب لمحور الصادات

٤) أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المستقيم ٣س - ٣ص + ٥ = ٠ مع محور السينات

الحل

٥) أوجد الميل والجزء المقطوع لمحور الصادات للمستقيم $\frac{س}{٢}$ + $\frac{ص}{٣}$ = ١

الحل

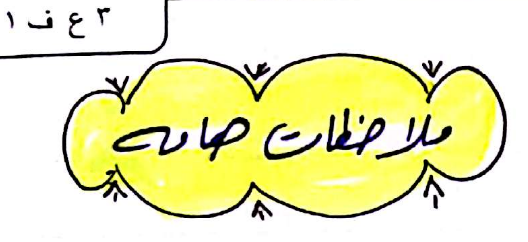
$\frac{س}{٢}$ + $\frac{ص}{٣}$ = ١ (بالضرب × ٦)

٣س + ٢ص = ٦

٢ص = -٣س + ٦ (÷ ٢)

ص = $\frac{-٣}{٢}$ س + ٣

∴ الميل = $\frac{-٣}{٢}$ والمستقيم يقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات ٣ وحدات



إيجاد معادلة المستقيم الذي ميله م ويقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات جـ أو يقطع محور الصادات في (٠، جـ) هي

⇐ **ص = م س + جـ**

حالات خاصة

١) معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل و(٠، ٠) هي ص = م س

٢) معادلة محور السينات هي ص = ٠

٣) معادلة محور الصادات هي س = ٠

٤) معادلة الموازي لمحور السينات ويمر بالنقطة (س١، ص١) هي ص = الإحداثي الصادي

٥) معادلة الموازي لمحور الصادات ويمر بالنقطة (س١، ص١) هي س = الإحداثي السيني

أكمل

١) معادلة المستقيم الموازي لمحور السينات ويمر بالنقطة (٣، -٢) هي ص = -٢

٢) معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات ويمر بالنقطة (-٣، ٥) هي س = -٣

٣) معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل وميله = ٢ هي ص = ٢س

مثال (١)

اكتب معادلة المستقيم الذى

(١) ميله = $\frac{-٣}{٤}$ ويقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات ٣ وحدات

الحل

م = $\frac{-٣}{٤}$ حـ = ٣

∴ المعادلة هى ص = م س + حـ

∴ ص = $\frac{-٣}{٤}$ س + ٣

(٢) ميله = ٢ ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات ٥ وحدات طول

الحل

ص = م س + حـ

ص = ٢ س + (-٥)

ص = ٢ س - ٥

مثال (٢)

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (١، -١) ، (٢، ٢)

الحل

ص = م س + حـ

م = $\frac{٢ + ١}{٢ - ١}$ = $\frac{٣}{١}$ = ٣

∵ المستقيم يمر بالنقطة (١، -١)

س = ١   ص = -١

-١ = ٣ + حـ

∴ حـ = -١ - ٣ = -٤

∴ معادلة المستقيم هى ص = ٣ س - ٤

تمرين (١)

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٢، ٢) ، (٣، ٤)

الحل

مثال (٢)

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١، ٢) وموازياً للمستقيم

٢ س + ٣ ص - ٦ = ٠

الحل

ميل المستقيم المعطى = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-٢}{٣}$

∴ ميل المطلوب = $\frac{-٢}{٣}$

∴ معادلة المستقيم المطلوب ص = $\frac{-٢}{٣}$ س + حـ

∵ (١، ٢) تنتمى للمستقيم

∴ ٢ = $\frac{-٢}{٣}$ + حـ

∴ حـ = ٢ + $\frac{٢}{٣}$ = $\frac{٨}{٣}$

تكون المعادلة هى ص = $\frac{-٢}{٣}$ س + $\frac{٨}{٣}$

تمرين (٢)

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢، ٣) وعمودياً على المستقيم المار بالنقطتين أ (٣، -٤) ، ب (٥، -٣)

مثال (٣)

إذا كان المستقيم ل: ٢س - ٣ص - ٦ = ٠ يقطع محور السينات عند أ ومحور الصادات عند ب فأوجد

(١) إحداثي النقطتين أ ، ب

(٢) معادلة المستقيم المار بمنتصف $\overline{أب}$ ويوازي محور الصادات

الحل

(١) نفرض أن أ (س ، ٠)

∴ عندما ص = ٠ ∴ ٢س - ٣ × ٠ - ٦ = ٠

∴ ٢س = ٦ ∴ س = ٣

∴ نقطة التقاطع مع محور السينات أ (٣ ، ٠)

، نفرض أن ب (٠ ، ص) عندما س = ٠

∴ ٢ × ٠ - ٣ص - ٦ = ٠

-٣ص = ٦ ∴ ص = $\frac{٦}{-٣}$ = -٢

∴ نقطة التقاطع مع محور الصادات ب (٠ ، -٢)

(٢) نفرض أن ء منتصف $\overline{أب}$

ء = $\left(\frac{٣+٠}{٢} ، \frac{٠-٢}{٢}\right)$ = $\left(\frac{٣}{٢} ، -١\right)$

∴ معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات ويمر بالنقطة $\left(\frac{٣}{٢} ، -١\right)$

هي س = $\frac{٣}{٢}$

تمرين (٣)

أوجد معادلة محور تماثل $\overline{سص}$ حيث س(٣ ، -٢) ، ص(-٥ ، ٦)

الحل

ملحوظة: محور تماثل القطعة المستقيمة هو المستقيم العمودي عليها من منتصفها

مثال (٤)

في الشكل المقابل (الشرقية ٢٠١٣)

$\overleftrightarrow{أب}$ يقطع محور الصادات في النقطة أ (٠ ، ٨)

ويقطع محور السينات في النقطة ب

فإذا كان ظا (أ ب̂ و) = $\frac{٤}{٣}$ فأوجد

(١) أولاً ق(ب أ̂ و) ثانياً إحداثي ب

(٢) أولاً ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$

ثانياً معادلة المستقيم المار بالنقطة و وعمودياً على $\overleftrightarrow{أب}$

الحل

(١) أولاً ∵ ظا (أ ب̂ و) = $\frac{٤}{٣}$

∴ ق (أ ب̂ و) = ٥٣° ٧َ ٤٨ً

∴ قياس (ب أ̂ و) = ٩٠° - ٥٣° ٧َ ٤٨ً

= ٣٦° ٥٢َ ١٢ً

ثانياً نفرض أن النقطة ب (س ، صفر)

، ∵ ظا (أ ب̂ و) = $\frac{٣}{٤}$

∴ $\frac{٨}{س} = \frac{٤}{٣}$ ∴ س = $\frac{٣ × ٨}{٤}$ = ٦

∴ ب (٦ ، ٠)

(٢) أولاً: ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٠-٨}{-٦} = \frac{-٨}{٦} = \frac{-٤}{٣}$

ثانياً ∵ المستقيم المطلوب ⊥ $\overleftrightarrow{أب}$

∴ ميل المطلوب = $\frac{٣}{٤}$

∴ معادلة المستقيم المطلوب ص = $\frac{٣}{٤}$ س + جـ

، ∵ المستقيم يمر بنقطة الأصل و (٠ ، ٠)

∴ جـ = ٠ ∴ المعادلة هي ص = $\frac{٣}{٤}$ س

مثال (٥)

فى الشكل المقابل (الشرقية ٢٠١٤)

النقط $أ(٢ ، ٦)$ ، $و(٠ ، ٠)$ ، $ب(٦ ، ٢)$ ، $د$ هى رؤوس معين

أوجد

(١) إحداثى النقطة $د$

(٢) معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ود}$

(٣) $ق(\hat{د و هـ})$

الحل

(١) ∵ $أ و ب د$ معين ∴ منتصف $\overline{ود}$ = منتصف $\overline{أب}$ = $\left(\frac{٦+٢}{٢} ، \frac{٢+٦}{٢}\right)$

$= (٤ ، ٤)$

∴ منتصف $\overline{ود} = (٤ ، ٤)$

وبفرض أن $د(س ، ص)$ $و(٠ ، ٠)$

∴ $\left(\frac{س+٠}{٢} ، \frac{ص+٠}{٢}\right) = (٤ ، ٤)$

∴ $\frac{س}{٢} = ٤$ ∴ $س = ٨$

، $\frac{ص}{٢} = ٤$ ∴ $ص = ٨$

∴ $د(٨ ، ٨)$

(٢) ∵ $\overleftrightarrow{ود}$ يمر بنقطة الأصل ، $(٨ ، ٨)$

∴ المعادلة هى $ص = م س$

الميل $(م) = \frac{-٨}{٠-٨} = \frac{٨}{٨} = ١$

∴ $ص = س$

(٣) ميل $\overleftrightarrow{ود}$ = ظا $(\hat{د و س}) = ١$

∴ $ق(\hat{د و س}) = ٤٥°$ ∴ $ق(\hat{د و هـ}) = ١٨٠° - ٤٥° = ١٣٥°$

مثال (٦)

فى الشكل المقابل (الشرقية ٢٠١٥)

$ل_١ // ل_٢$

$\overleftrightarrow{أب} \perp ل_١$

$أ(١ ، ٥)$

أوجد

(١) معادلة المستقيم $ل_١$

(٢) معادلة المستقيم $ل_٢$

(٣) طول $\overline{أب}$

الحل

(١) ∵ $ل_١$ يمر بنقطة الأصل ∴ معادلته $ص = م س$

∵ ميل المستقيم = ظا $٤٥° = ١$

∴ معادلة المستقيم $ل_١$ هى $ص = س$

(٢) ∵ $ل_١ // ل_٢$

∴ $م_١ = م_٢ = ١$

∴ معادلة المستقيم $ل_٢$ هى $ص = م س + جـ$

، ∵ $ل_٢$ يمر بالنقطة $أ(١ ، ٥)$

∴ $٥ = ١ + جـ$ ∴ $جـ = ٥ - ١ = ٤$

∴ معادلة $ل_٢$ هى $ص = س + ٤$

(٣) بفرض أن $ب(س ، ص)$ ∵ $ص = س$

، ∵ $\overleftrightarrow{أب} \perp ل_١$ ∴ ميل $\overleftrightarrow{أب} = -١$

∴ $\frac{ص-٥}{س-١} = -١$ ∴ $ص - ٥ = -س + ١$

، ∵ $س = ص$ ∴ $ص - ٥ = -ص + ١$

∴ $٢ص = ١ + ٥ = ٦$ ∴ $ص = \frac{٦}{٢} = ٣$

∴ $س = ٣$ ∴ $ب(٣ ، ٣)$

طول $\overline{أب} = \sqrt{(١-٣)^٢ + (٥-٣)^٢} = ٢\sqrt{٢}$ وحدة طول



الواجب

(١) أوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات.

① ص = ٣س + ١

② ص = -٢س + ٣

③ ص = ٥س - ٢

④ $\frac{س}{٢}$ + ٣ص = ٦

⑤ ص + س - ١ = ٠

(٢) أوجد معادلة المستقيم الذي ميله ويقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات

① ميله = ٣ ، ه وحدتان

② ميله = -١ ويقطع ٣ وحدات

(٣) أوجد معادلة المستقيم الذي ميله .. ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات

① ميله = -٢ ويقطع ٥ وحدات

② ميله = ١ ويقطع ٣ وحدات

(٤) أوجد معادلة الخط المستقيم

① المار بنقطة الأصل ويصنع مع س+ ١٣٥°

② المار بالنقطة (٠، ٢) ويصنع مع س+ ٤٥°

③ الموازي للمستقيم ٢س - ٣ص = ٦ ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات ٣ وحدات

④ المار بالنقطة (٢، -١) وميله = ٢

⑤ المار بالنقطة (-٢، ٣) وعمودي على المستقيم ص = $\frac{١}{٢}$س - ٥

⑥ المار بالنقطة (٣، ٢) ويوازي المستقيم المار بالنقطتين (٥، ٦) ، (-١، ٢)

⑦ المار بالنقطتين (٢، -١) ، (١، ١)

⑧ المار بالنقطتين (٤، ٢) ، (-٢، -١) ثم اثبت أنه يمر بنقطة الأصل.

⑨ الذي يمر بمنتصف القطعة $\overline{أب}$ حيث أ(٣، ٦) ، ب(-١، ٤) وعمودياً على المستقيم الذي معادلته ٢ص = ٤س - ٥

⑩ محور تماثل $\overline{أب}$ حيث أ(٤، ٨) ، ب(-٢، ٤)

⑪ يوازي المستقيم ٢ص = ٤س - ٥ وبمنتصف القطعتين أ(٤، ٨) ، (٢، ٤)

(٥) أثبت أن المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ حيث أ(٢، ٣) ، ب(-٢، ١) يوازي المستقيم الذي معادلته س - ٢ص + ٨ = ٠

(٦) اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين أ(٢، ٣) ، ب(-٢، ١) عمودي على المستقيم الذي معادلته ٢س + ص + ٨ = ٠

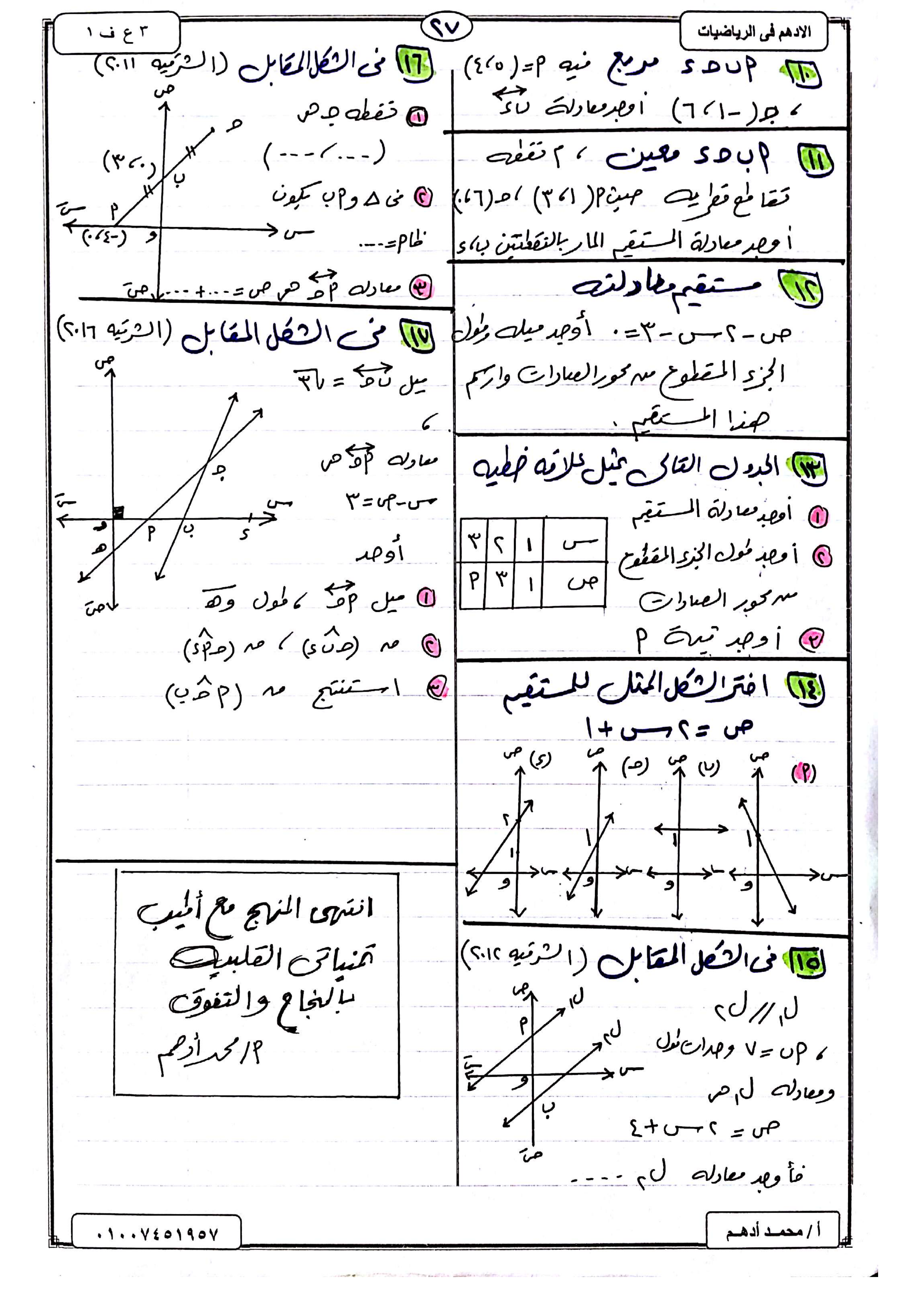
(٧) إذا كان أس + ٢ص - ٣ = ٠ موازياً للمستقيم المار بالنقطتين (٢، ٣) ، (١، ٥) فأوجد قيمة أ

(٨) أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع من محور السينات والصادات جزئين موجبين طولاهما ٤ ، ٩ على الترتيب

(٩) أ ب جـ مثلث فيه أ(١، ٢) ، ب(-٥، -٢) ، جـ(٣، ٤) ، د منتصف $\overline{أب}$ ، رسم $\overleftrightarrow{ده}$ // $\overleftrightarrow{بجـ}$ ويقطع $\overleftrightarrow{أجـ}$ في هـ

أوجد ① طول ده

② معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ده}$



(١٠) أ ب جـ د مربع فيه أ = (٥، ٤) ، جـ (-١، ٦) أوجد معادلة $\overleftrightarrow{بد}$

(١١) أ ب جـ د معين ، م نقطة تقاطع قطريه حيث أ(١، ٣) ، م(٦، ٠) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين ب، د

(١٢) مستقيم معادلته ص - ٢ س - ٣ = ٠ أوجد ميله وطول الجزء المقطوع من محور الصادات وارسم هذا المستقيم.

(١٣) الجدول التالى يمثل علاقة خطية

س	١	٢	٣
ص	١	٣	أ

١) أوجد معادلة المستقيم

٢) أوجد طول الجزء المقطوع من محور الصادات

٣) أوجد قيمة أ

(١٤) اختر الشكل الممثل للمستقيم ص = ٢ س + ١

(أ) (ب) (جـ) (د)

(١٥) فى الشكل المقابل (الشرقية ٢٠١٢)

ل١ // ل٢ ، أ ب = ٧ وحدات طول

ومعادلة ل١ ص = ٢ س + ٤

فأوجد معادلة ل٢ ....

(١٦) فى الشكل المقابل (الشرقية ٢٠١١)

(٠، ٣) ، (-٤، ٠)

١) نقطة جـ هى (...، ...)

٢) فى △ و أ ب يكون ظا م = ...

٣) معادلة $\overleftrightarrow{أجـ}$ هى ص = ... س + ...

(١٧) فى الشكل المقابل (الشرقية ٢٠١٦)

ميل $\overleftrightarrow{بجـ}$ = ٣/٢ ،

معادلة $\overleftrightarrow{أجـ}$ هى س - ص = ٣

أوجد

١) ميل $\overleftrightarrow{أجـ}$ ، طول و هـ

٢) ق(∠ جـ ب د) ، ق(∠ جـ أ د)

٣) استنتج ق(∠ أ جـ ب)

انتهى المنهج مع أطيب تمنياتى القلبية بالنجاح والتفوق

م/ محمد أدهم